HADMÉRNÖK

III. Évfolyam 4. szám - 2008. december

Gyarmati József
Zrínyi Miklós Nemzetvédelmi Egyetem
gyarmati.jozsef@zmne.hu

LENGŐRENDSZER ANALITIKAI VIZSGÁLATA

Absztrakt

A cikk elemi egyszabadságfokú lengőrendszerek analitikai vizsgálatát mutatja be. A vizsgálat kiterjed a csillapítás és a gerjesztés hatásainak a vizsgálatára is.

The main goal of this article to show the analytical solve of the oscillations of a system. The examined systems are made up of spring and absorber. The system is examined with excitation too.

Kulcsszavak: *differenciálegyenlet, lengés ~ differential equation, oscillation.*

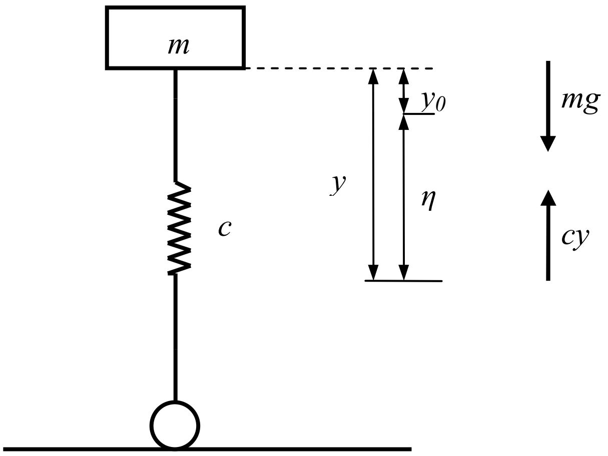
Bevezetés

A cikk esősorban oktatási céllal mutatja be az egy szabadságfokú lengőrendszereket. A lengőrendszerek vizsgálata a legegyszerűbbtől a legösszetettebb irányában tart. Az első modell lényegében egy rugón támasztott m tömegű anyagi pont lengését írja le s kezdeti benyomódást követően, majd ezt követően a rugó mellé párhuzamosan egy csillapító elem van beépítve és végül az előbbi lengőrendszer egy feltételezett szinuszos útprofil által gerjesztést kap.

A mozgásokat leíró differenciálegyenletek analitikusan vannak megoldva, az eredmények jól érthetősége érdekében az időszerinti elmozdulás függvény grafikusan is ábrázolva van.

Egy szabadságfokú lengőmozgás

A lengőrendszer kinematikai vázlatát az 1. ábra mutatja.



1. ábra Csillapítatlan lengőrendszer kinematikai vázlata

Az 1. ábrán ható erőket behelyettesítve a Newton II. törvénye szerinti

$$\sum \mathbf{F} = m\ddot{y}$$

mozgásegyenletbe, a lengést a következő differenciálegyenlet írja le:

$$m\ddot{y} = mg - cy\,.$$

A kezdeti benyomódás szerint:

$$\begin{aligned} mg &= cy_0 \\ y &= y_0 + \eta \\ \dot{y} &= \dot{\eta} \\ \ddot{y} &= \ddot{\eta} \end{aligned},$$

amiből a lengés a

$$m\ddot{\eta} + c\eta = 0\,,$$

differenciálegyenlet segítségével írható le. A karakterisztikus egyenlet:

$$m\lambda^2 + c = 0\,.$$

A karakterisztikus egyenlet megoldása

$$\lambda = \sqrt{-\frac{c}{m}}\,.$$

Mivel fizikai tartalmuk miatt *c* és *m* pozitív ezért a megoldás

$$\lambda = 0 \pm \sqrt{\frac{c}{m}}j$$

alakban írható fel, ahol *j* a képzetes egység. A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\eta = c_1 \cos\sqrt{\frac{c}{m}}t + c_2 \sin\sqrt{\frac{c}{m}}t\,.$$

A kezdeti feltételek:

$$\eta(0) = s$$
$$\dot{\eta}(0) = 0,$$

vagyis a lengőrendszert a 0-dik időpillanatban s nagysággal a benyomjuk, majd elengedjük. Behelyettesítve

$$s = c_1 \cos\sqrt{\frac{c}{m}}0 + c_2 \sin\sqrt{\frac{c}{m}}0$$
$$c_1 = s$$
$$\dot{\eta} = -c_1\sqrt{\frac{c}{m}}\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t + c_2\sqrt{\frac{c}{m}}\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t$$
$$0 = -c_1\sqrt{\frac{c}{m}}\sin\sqrt{\frac{c}{m}}0 + c_2\sqrt{\frac{c}{m}}\cos\sqrt{\frac{c}{m}}0$$
$$c_2 = 0$$

Az egyenlet megoldása:

$$\eta = s\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t,$$

ahol s a lengés amplitúdója és

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

a körfrekvencia. Egy teljes lengés ideje:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{c}{m}}}$$

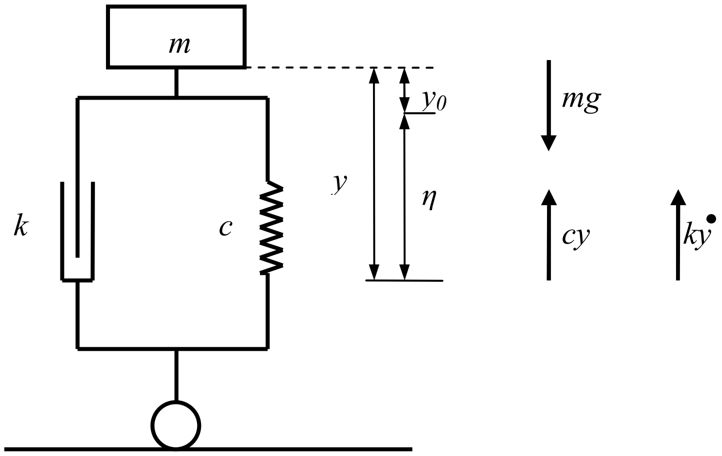
Példa

Legyen m:= 50kg; c:=100 N/m ;s:=-0.05m. Az anyagi pontnak tekintett m tömeg y irányú elmozdulását leíró egyenlet:

$$\eta = -0{,}05\cos\sqrt{2}t.$$

Egy szabadságfokú csillapított lengőmozgás

A lengőrendszer kinematikai vázlatát a 2. ábra mutatja.



2. ábra Csillapított lengőmozgás kinematikai vázlata

A 3. ábrán ható erőket behelyettesítve a Newton II. törvénye szerinti

$$\sum \mathbf{F} = m\ddot{y}$$

mozgásegyenletbe, a lengést a következő differenciálegyenlet írja le:

$$m\ddot{y} = mg - cy - k\dot{y}$$

A kezdeti benyomódás szerint:

$$\begin{aligned} mg &= cy_0 \\ y &= y_0 + \eta \\ \dot{y} &= \dot{\eta} \\ \ddot{y} &= \ddot{\eta} \end{aligned},$$

amiből a lengés a

$$m\ddot{\eta} + k\dot{\eta} + c\eta = 0,$$

differenciálegyenlet segítségével írható le. A karakterisztikus egyenlet:

$$m\lambda^2 + k\lambda + c = 0.$$

Az egyenlet megoldása:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4mc}}{2m}.$$

Mivel $k^2 << 4mc$, a megoldás a következő alakban írható fel

$$\lambda_{1,2} = \frac{-k}{2m} \pm \frac{\sqrt{4mc - k^2}}{2m} j$$

ahol *j* a képzetes egység. Legyen:

$$a = -\frac{k}{2m}$$

$$b = \frac{\sqrt{4mc - k^2}}{2m}$$

Az differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\eta = e^{at}\left(C_1 \cos bt + C_2 \sin bt\right)$$

A kezdeti feltételekből

$$\eta(0) := s \;\Rightarrow\; C_1 = s$$

$$\eta = e^{at}\left(s \cos bt + C_2 \sin bt\right)$$

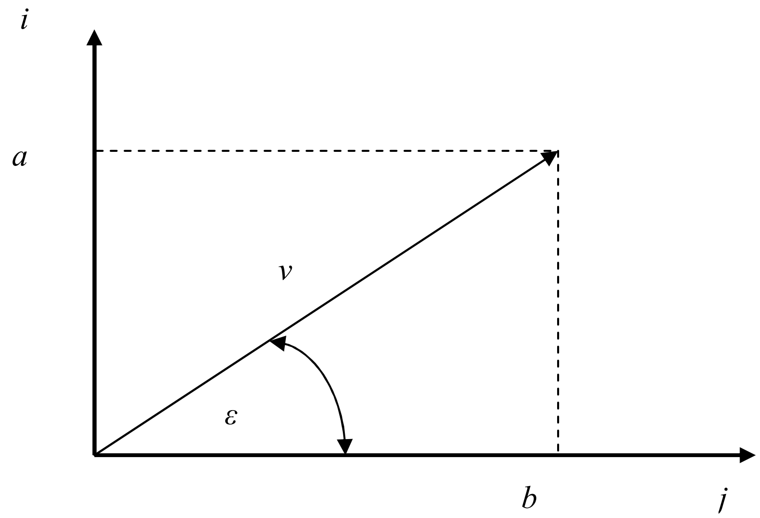
$$\dot{\eta} = ae^{at}\left(s \cos bt + C_2 \sin bt\right) + e^{at}\left(-sb \sin bt + C_2 b \cos bt\right)$$

$$\dot{\eta}(0) = 0$$

$$0 = as + C_2 b \;\Rightarrow\; C_2 = -\frac{a}{b}s$$

$$\eta = \frac{s}{b}e^{at}\left(b \cos bt - a \sin bt\right)$$

A 3. ábra értelmezi *a* és *b* tartalmát.



3. ábra A karakterisztikus egyenlet gyökeinek geometriai értelmezése

A 3. ábrából:

$$v = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\sin \varepsilon = \frac{a}{v}$$

$$\cos \varepsilon = \frac{b}{v}$$

Felhasználva a

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

összefüggést, a differenciálegyenlet a következő egyszerű formára hozható:

$$\eta = \frac{s}{b} v e^{at} \cos(bt + \varepsilon)$$

A körfrekvencia:

$$\omega_k = b = \frac{\sqrt{4mc - k^2}}{2m} = \sqrt{\frac{4mc - k^2}{4m^2}} = \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{k^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega^2 - a^2} \ .$$

A periódusidő:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - a^2}}$$

ahol ω a csillapítatlan lengőmozgás körfrekvenciája. A csillapodási hányados:

$$K = \frac{e^{-at}}{e^{-a(t+T)}} = e^{aT}$$

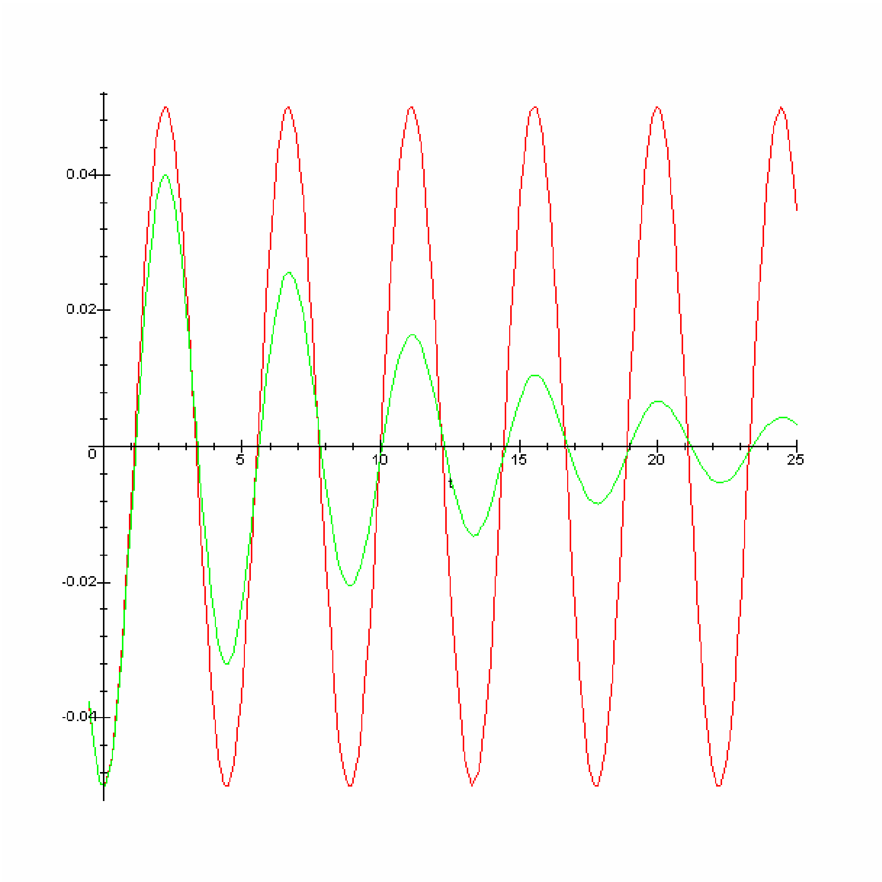
Példa

Legyen *m*:= 50kg; *k*:=10;Ns/m; *c*:=100 N/m ;*s*:=-0.05m
A differenciálegyenlet

$$\eta = -0.05012547070 \cdot e^{-0,1t} \cos(1.410673598t - 0.07076973666)$$

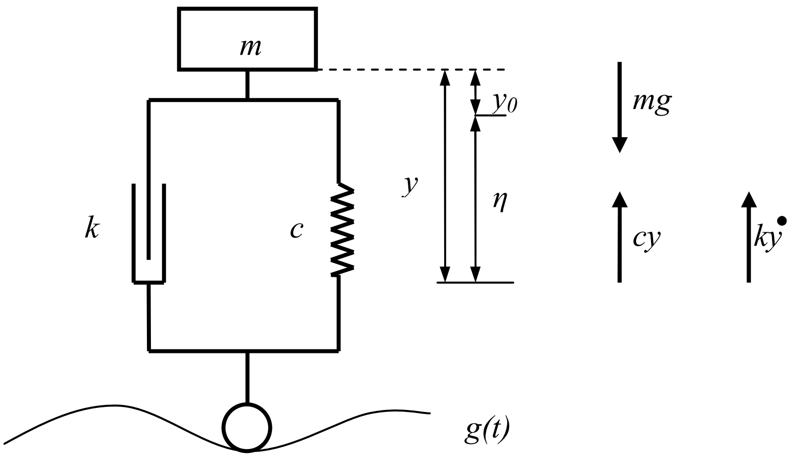
A lengést a 4. ábra mutatja. Az ábrán zöld jelzi a csillapított, és piros vonal jelzi az előző példa csillapítatlan lengését. A frekvencia az ábra alapján azonosnak tűnik. Az eltérés nagysága 100 lengésre:

100 csillapított lengés ideje: 445,4031975 s
100 csillapítatlan lengés ideje: 444,2882938 s



4. ábra harmonikus csillapított lengőmozgás

Egy szabadságfokú csillapított gerjesztett lengőmozgás



5. ábra Csillapított gerjesztett lengőmozgás kinematikai vázlata

A differenciálegyenlet:

$$m\ddot{\eta} + k\dot{\eta} + c\eta = g(t)$$

Az egyenlet megoldása az inhomogén egyenlethez tartozó homogén egyenlet általános megoldása és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának az összege:

$$\eta = \mathrm{H} + \eta_p$$

A gerjesztés legyen:

$$g(t) := \sin(t)$$

A homogén egyenlet megoldása az előző pont szerint:

$$\mathrm{H} = \frac{s}{b} v e^{at} \cos(bt + \varepsilon)$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása:

$$\eta_0 = C_3 \cos t + C_4 \sin t$$

deriválva:

$$\dot{\eta}_0 = -C_3 \sin t + C_4 \cos t$$
$$\ddot{\eta}_0 = -C_3 \cos t + C_4 \sin t$$

behelyettesítve a homogén egyenletbe:

$$\cos(t)\left(cC_3 + kC_4 - mC_3\right) + \sin(t)\left(cC_4 - kC_3 - mC_4\right) = 0$$

amiből következik:

$$cC_4 - kC_3 - mC_4 = 1$$
$$cC_3 - kC_4 - mC_3 = 1$$

$$C_3 = -\frac{k}{(1+k^2)(c-m)}$$

$$C_4 = \frac{1}{1+k^2}$$

Kezdeti benyomódással az egyenlet megoldásának általános alakja:

$$\mathrm{H} = \frac{s}{b} v e^{at} \cos(bt + \varepsilon) - \frac{k}{(1+k^2)(c-m)} \cos(t) + \frac{1}{1+k^2} \sin(t)$$

Kezdeti benyomódás nélkül a megoldás megegyezik az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásával.

Példa

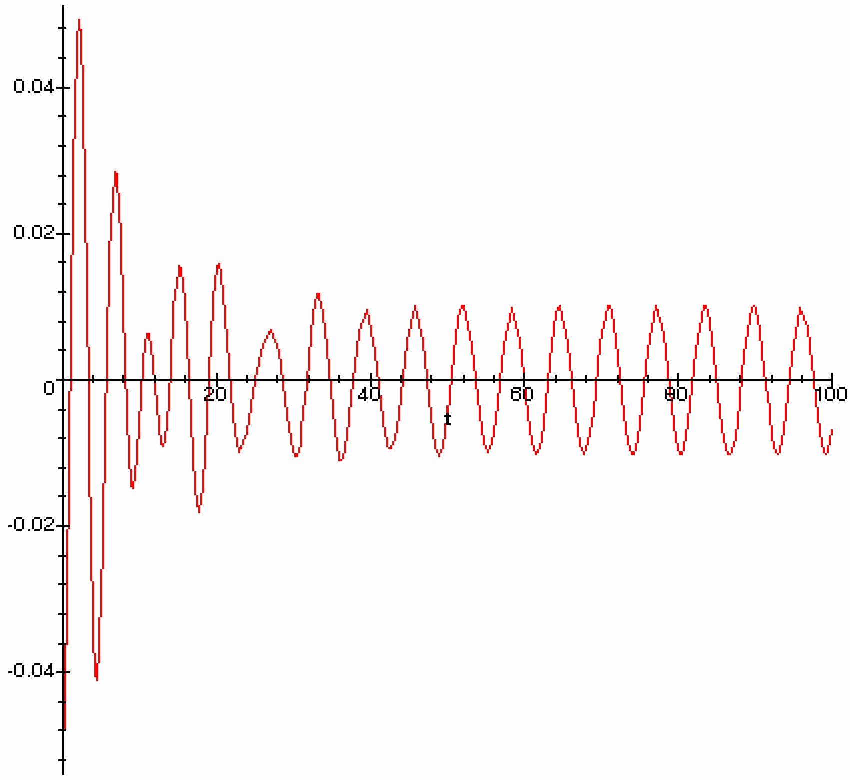
Legyen m:= 50kg; k:=10;Ns/m; c:=100 N/m ;s:=0
Az egyenlet a behelyettesítés után:

$$\mathrm{H} = -\frac{1}{505} \cos(t) + \frac{1}{101} \sin(t)$$

Látható, hogy kezdeti benyomás nélkül harmonikus lengőmozgást végez a rendszer. Vizsgáljuk meg kezdeti benyomódással.
Legyen m:= 50kg; k:=10;Ns/m; c:=100 N/m ;s:= -0,05
Az egyenlet a behelyettesítés után:

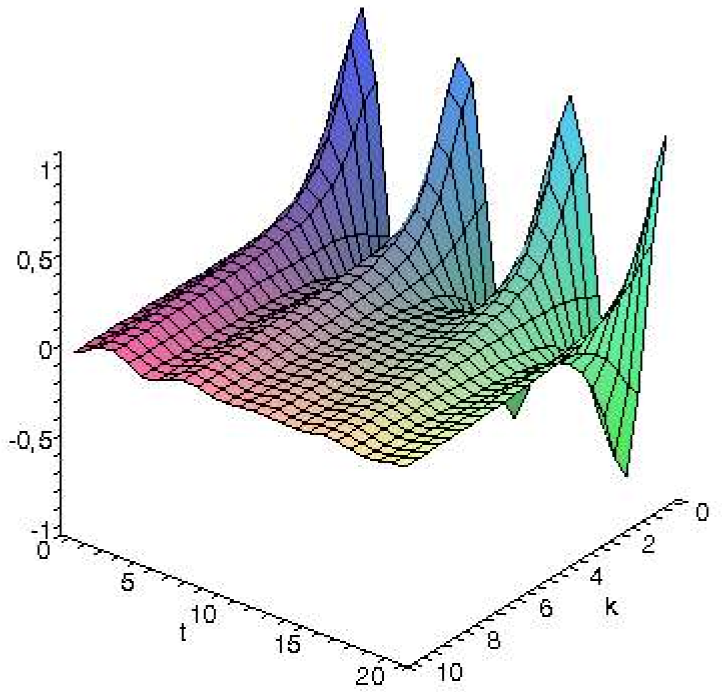
$$H = - - 0.05012547070 \cdot e^{-0,1t} \cos(1.410673598t - 0,07076973666) - \frac{1}{505}\cos(t) + \frac{1}{101}\sin(t)$$

A függvényt a 6. ábra mutatja.



6. ábra Csillapított gerjesztett lengőmozgás

Az előző vizsgálatok az η(t) függvények előállítására vonatkoztak. Grafikusan viszonylag könnyen előállítható η(t,k), amely segítségével vizsgálhatjuk a csillapítás nagyságának változása milyen befolyást gyakorol a lengésre, vizsgálható továbbá, hogy műszakilag értelmezhető határok között kialakulhat rezonancia vagyis a sajátlengés és a gerjesztés összegzése. A $t,\ k \rightarrow \eta(t,k)$ függvényt a 7. ábra mutatja m:= 50kg; c:=100 N/m; s:= -0,05 paraméterekkel.



7. ábra Csillapított gerjesztett lengőmozgás idő és csillapítás függvényében

A 7. ábra látható, hogy csillapítás nélkül a rendszer lengésének amplitúdója a kezdeti benyomódás sokszorosára nő.

Irodalom

I. N. Bronstein, K.A. Szemengyajev: Matematikai zsebkönyv, Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1987.