Kovács József – Tóth Rudolf

A becslés matematikai műveletének repüléstechnikai alkalmazása

Absztrakt

A repülőgépek fedélzetén végrehajtott mérések döntő része közvetett mérés. A cikkben a szerzők bemutatják, hogy a matematikából ismert becslés művelete hogyan alkalmazható a repülőgépek fedélzeti rendszereiben erre a mérési módszerre. A becslési feladatot a szerzők a legkisebb négyzetek módszerével oldják meg azokra az esetekre, amikor a mért és a meghatározni kívánt jellemzők közötti függvénykapcsolat nem pontosan ismert, illetve ha figyelembe vesszük a véletlen mérési hibákat és az egyes mérések eltérő mérési pontosságát.

Most measurements on board of aircraft are indirect ones. In the article authors apply mathematical operation of estimation for these measurements onboard. The task of estimation authors solve using method of minimal quadrates in cases when the relation between measured and wanted characteristics is not known exactly or rather the random faults of measurements and the different precision of each measurement are considered.

Kulcsszavak: *repüléstechnika, repülésszabályozás, becslés művelete*

A repülőgépek fedélzeti rendszereiben (pl. az adatrögzítő rendszerekben, a fedélzeti beépített önellenőrző rendszerekben, automatikus repülésszabályozó rendszerekben, stb.) sok esetben szükséges lehet ismeretlen jellemzők összességének meghatározására olyan mérések eredményei alapján, amelyek általában hibákat tartalmaznak. Az ismeretlen jellemzők így meghatározott értékeit becsült értéknek vagy becslésnek, a becslés meghatározott folyamatát, pedig becslési feladatnak nevezzük. Általánosan elmondhatjuk, hogy a becslési feladat megoldása – vagyis a becsült értékek meghatározása – a mérési eredmények és adatok feldolgozásának egyik formája [1]. Ebben az esetben tehát az érzékelés helye és az adatfelhasználás helye közé olyan elemet iktatunk, amely a becslési feladatot végrehajtja.

A meghatározni kívánt ismeretlen jellemzők összességét jelöljük X_1, X_2, …, X_n. Ezek meghatározni kívánt becsült értékei x_1, x_2, …, x_n. A közvetett mérés lényegéből következik, hogy nem közvetlenül X_1, X_2, …, X_n értékeit mérjük, hanem az azokkal meghatározott és ismert függvénykapcsolatban lévő y_1, y_2, …, y_k jellemzőket. Tehát:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(X_1, X_2, ..., X_n), \\ y_2 &= f_2(X_1, X_2, ..., X_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_k &= f_k(X_1, X_2, ..., X_n). \end{aligned} \tag{1}$$

A továbbiakban azt a legegyszerűbb esetet vizsgáljuk, amikor a mért jellemzők az ismeretlen jellemzőkkel lineáris függvénykapcsolatban vannak, vagyis az (1) egyenlet az alábbi formában írható fel:

$$
\begin{aligned}
&h_{11}X_1 + h_{12}X_2 + \ldots + h_{1n}X_n = y_1, \\
&h_{21}X_1 + h_{22}X_2 + \ldots + h_{2n}X_n = y_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&h_{k1}X_1 + h_{k2}X_2 + \ldots + h_{kn}X_n = y_k,
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

ahol h_{ij} – ismert együtthatók.

A (2) k lineáris algebrai egyenletből álló n ismeretlenes egyenletrendszerben az ismeretlenek X_j, $j = \overline{1,n}$ értékűek lesznek. Ha az egyenletrendszernek lenne pontos, egyértelmű matematikai megoldása, akkor becslésre nem lenne szükség, mert az ismeretlenek a mérésekkel pontosan meghatározhatóak lennének. Vizsgáljuk tehát azt az esetet, amikor $n>k$, vagyis az ismeretlenek száma meghaladja a rendelkezésünkre álló egyenletek számát (vagyis az egyenletrendszer nem rendelkezik megoldással).

Az, hogy az egyenletrendszernek nincs pontos megoldása, fizikailag a következő okokra vezethető vissza [1]:

- az X_j és y_i közötti fizikai kapcsolatokat csak közelítően írja le az egyenletrendszer (pl. h_{ij} együtthatók nem pontosan ismertek),
- y_i, $i = \overline{1,k}$ értékei hibákkal kerülnek meghatározásra.

Akkor az ismeretlen értékek becslésének feladatát vizsgálhatjuk úgy, mint a (2) egyenletrendszer közelítő megoldásainak meghatározását, azzal a feltételezéssel, hogy y_i, $i = \overline{1,k}$ értékeit mérések sorozatával megállapítottuk, és a közelítő megoldást tekinthetjük a becslési feladat megoldásának, tehát becsült értéknek.

Az összes lehetséges közelítő megoldás közül célszerű a valamilyen – általunk előzetesen meghatározott – értelemben legjobb megoldás kiválasztása. Az ilyen megoldás megkeresésének egyik lehetősége a legkisebb négyzetek módszerének alkalmazása. A módszerrészletes leírása, bemutatása a [2], [3] és [4] irodalmakban megtalálható. A módszeren belül megkülönböztetünk determinisztikus és statisztikus megközelítést. A determinisztikus megközelítést akkor alkalmazzuk, ha véletlen mérési hibák nincsenek, vagy az ilyen hibák statisztikai jellemzőit nem ismerjük. A statisztikus megközelítésben a véletlen hibák statisztikai jellemzőit ismerteknek tételezzük fel. Az adatfeldolgozás során használt matematikai apparátus ilyenkor lehetővé teszi a mérések eltérő pontosságának a figyelembe vételét is [1].

A (2) egyenletrendszernek a legkisebb négyzetek módszerével meghatározott megoldásait – vagyis a becsült értékeket – az előzőeknek megfelelően jelöljük mint x_1, x_2, …, x_n. Mivel ezek csak közelítő megoldások, ezért visszahelyettesítésük az eredeti egyenletbe nem eredményezi az egyenlőségek teljesülését. Ahhoz, hogy az egyenlőségek valóban teljesüljenek, az egyenletek bal oldalát ki kell egészíteni valamilyen b_i, $i = \overline{1,k}$ értékekkel. Így most az egyenletrendszerünk:

$$
\begin{aligned}
&h_{11}x_1 + h_{12}x_2 + \ldots + h_{1n}x_n + b_1 = y_1, \\
&h_{21}x_2 + h_{22}x_2 + \ldots + h_{2n}x_n + b_2 = y_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad\qquad (3) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&h_{k1}x_1 + h_{k2}x_2 + \ldots + h_{kn}x_n + b_k = y_k.
\end{aligned}
$$

Belátható, hogy minél kisebbek b_i értékei, annál jobbak a becsült értékek, vagyis x_i értékek annál jobban közelítik a valós X_i értékeket. Legyen ezért a közelítő megoldás minőségi jellemzője a b_i „egyeztetlenségi” értékek függvénye:

$$J = f(b_1, b_2, \ldots, b_k).$$

A legkisebb négyzetek módszerében olyan négyzetes minőségi jellemzőt használunk, amely a b_i értékek négyzetösszege [1]:

$$J_1 = \sum_{i=1}^{k} b_i^2 = \sum_{i=1}^{k} (y_i - \sum_{j=1}^{n} h_{ij}x_j)^2. \qquad (4)$$

A (3) egyenletrendszer optimális megoldása a legkisebb négyzetek módszerével olyan x_j, $j = \overline{1,n}$ értékek, amelyek biztosítják a J_1 minőségi jellemző minimális értékét, vagyis a (4) négyzetösszegek minimumát:

$$J_1 = \sum_{i=1}^{k} (y_i - \sum_{j=1}^{n} h_{ij}x_j)^2 \to \min. \qquad (5)$$

Ebből a kritériumból ered a módszer elnevezése is. Mivel a J_1 függvényt minimalizálni kell, így azt költségfüggvénynek is tekinthetjük [2], [3].

Mivel a J_1 minőségi jellemző x_j, $j = \overline{1,n}$ becsült értékek függvénye, így az (5) feltétel akkor teljesül, ha $\frac{\partial J_1}{\partial x_j} = 0, j = \overline{1,n}$. Ezen egyenletek alapján határozhatjuk meg a keresett x_j becsült értékeket. A parciális deriváltakat kifejtve

$$\frac{\partial J_1}{\partial x_j} = -2\sum_{i=1}^{k} h_{ij}y_i + 2\sum_{i=1}^{k} h_{ij}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}x_j, \qquad (6)$$

és $j = \overline{1,n}$ esetére sorban egyenlővé téve zérussal, a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k} h_{i1}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}x_j = \sum_{i=1}^{k} h_{i1}y_i, \\
&\sum_{i=1}^{k} h_{i2}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}x_j = \sum_{i=1}^{k} h_{i2}y_i, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad\qquad (7) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&\sum_{i=1}^{k} h_{in}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}x_j = \sum_{i=1}^{k} h_{in}y_i.
\end{aligned}
$$

Bizonyítható [4], hogy a (7) n egyenletből álló n ismeretlenes egyenletrendszer együtthatóival felírt determináns nem zérus értékű, tehát a (6) egyenletrendszer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változókra egyetlen megoldást ad. A [7] egyenlet megoldása lesz az eredeti (2) egyenletrendszer megoldása a legkisebb négyzetek módszerével, determinisztikus megközelítésben.

Statisztikus megközelítésben szintén a (2) egyenletrendszerből indulunk ki, de most feltételezzük, hogy az rendelkezik zérustól eltérő értékű egyértelmű megoldással. A problémát most az okozza, hogy y_i értékeit mérési hibával határozzuk meg, vagyis a mérések eredményei nem y_i, hanem azoktól eltérő, de értékekben közeli jellemzők:

$$z_i = y_i + \nu_i, i = \overline{1,k}, \tag{8}$$

ahol ν_i – véletlen mérési hibák, amelyek megjelenésének következtében z_i szintén véletlen értékű lesz. Akkor a (2) egyenletrendszert most így írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} &h_{11}X_1 + h_{12}X_2 + \ldots + h_{1n}X_n = z_1, \\ &h_{21}X_1 + h_{22}X_2 + \ldots + h_{2n}X_n = z_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &h_{k1}X_1 + h_{k2}X_2 + \ldots + h_{kn}X_n = z_k. \end{aligned} \tag{9}$$

Ennek az egyenletrendszernek nincs pontos, egyértelmű megoldása. Ha z_i véletlen értékek statisztikai jellemzőit nem ismerjük, akkor az egyenletrendszer z_i értékeire megoldható determinisztikus megközelítésben. Ha ezek a jellemzők ismertek, akkor célszerű a statisztikus megközelítést alkalmazni. Így olyan pontosabb megoldást kapunk, amely figyelembe veszi a mérések eltérő pontosságát is [1].

Legyen ν_i véletlen mérési hibák várható értéke zérus: $M[\nu_i] = 0$, $i = \overline{1,k}$; szórásnégyzetük pedig általános esetben eltérő: $D[\nu_i] = M[\nu_i^2] = \sigma_i^2, i = \overline{1,k}$; és legyenek a hibák egymástól függetlenek, vagyis: $M[\nu_i \nu_j] = 0$, ha i≈j és $i, j = \overline{1,k}$.

Fogadjuk el továbbá, hogy a véletlen értékek normál eloszlásúak:

$$f_{\nu i}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma_i^2}}, i = \overline{1,k}.$$

Ennek megfelelően a z_i véletlen értékekre is felírhatjuk:

$$\begin{aligned} &M[z_i] = M[y_i + \nu_i] = y_i, \\ &D[z_i] = D[\nu_i] = \sigma_i^2, \\ &f_{zi}(\beta_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{(\beta_i - y_i)^2}{2\sigma_i^2}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Az x_j becsült értékek meghatározásához a (2) egyenleteket felhasználva helyettesítsük az $f_{zi}(\beta)$ kifejezésében y_i értékeket mint $\sum_{j=1}^{n} h_{ij} X_j$:

$$f_{zi}(\beta_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}e^{-\frac{1}{2\sigma_i^2}(\beta_i-\sum_{j=1}^{n}h_{ij}X_j)^2}.$$

Legyen valamely A_i véletlen esemény z_i véletlen értékeknek a β_i értéktől $\beta_i+d\beta_i$ értékig terjedő tartományba esése. Ennek az eseménynek a valószínűsége:

$$P[A_i]=P[\beta_i\leq z_i\leq\beta_i+d\beta_i]=f_{zi}(\beta_i)d\beta_i.$$

Legyen továbbá A véletlen esemény valamennyi z_i értéknek a fenti intervallumba esése, vagyis $A=A_1A_2\ldots A_k$. Az elfogadott kikötések értelmében z_i véletlen értékek egymástól függetlenek, ezért A_i események szintén egymástól függetlenek lesznek. Akkor:

$$\begin{aligned}P[A]&=P[A_1]P[A_2]..P[A_k]=\\&=f_{z1}(\beta_1)f_{z2}(\beta_2)...f_{zk}(\beta_k)d\beta_1d\beta_2...d\beta_k=\\&=f_{z1,z2,...zk}(\beta_1,\beta_2,...,\beta_k)d\beta_1d\beta_2...d\beta_k,\end{aligned}\qquad(11)$$

ahol $f_{z1,z2,...zk}=(2\pi)^{-k/2}\prod_{i=1}^{k}\sigma_i^{-1}e^{-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2\sigma_i^2}(\beta_i-\sum_{j=1}^{n}h_{ij}X_j)^2}$.

Ha $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_k$ értékeit rögzítjük, akkor az $f_{z1,z2,\ldots zk}$ függvény $L(X_1,X_2,\ldots,X_n, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_k)$ likelihood-függvénnyé válik

$$L(X_1,X_2,...,X_n;\beta_1,\beta_2,...,\beta_k)=const.e^{-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2\sigma_i^2}(\beta_i-\sum_{j=1}^{n}h_{ij}X_j)^2},\qquad(12)$$

ami lehetővé teszi $x_1, x_2, \ldots x_n$ becsült értékek meghatározásában a maximum-likelihood módszer alkalmazását [2] [3]. Ennek értelmében tegyük fel, hogy $P[A]=max,$ vagyis A esemény bekövetkeztének valószínűsége maximális. Ez a követelmény akkor teljesül, ha $X_1=x_1, X_2=x_2, \ldots, X_n=x_n$, amely esetben biztosítva lesz a (12) függvény maximuma, amely a hatványkitevőben lévő kifejezés abszolút értékének minimuma esetén következik be. Ebből a (9) egyenletrendszer $x_1, x_2, \ldots x_n$ megoldásainak optimumkritériuma felírható:

$$J_2=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2\sigma_i^2}(z_i-\sum_{j=1}^{n}h_{ij}x_j\rightarrow\min.\qquad(13)$$

A kritériumból következő egyenletrendszer:

$$\frac{\partial J_2(x_j)}{\partial x_j}=0, j=\overline{1,n}.\qquad(14)$$

A parciális deriváltakat meghatározva:

$$\frac{\partial J_2(x_j)}{\partial x_j}=-2\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sigma_1^2}h_{ij}z_i+2\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sigma_i^2}h_{ij}\sum_{j=1}^{n}h_{ij}x_j.$$

Ezt a kifejezést $j=1, 2, \ldots, n$ értékekre sorban egyenlővé téve zérussal és rendezve a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sigma_i^2}h_{ij}\sum_{j=1}^{n}h_{ij}x_j=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sigma_i^2}h_{ij}z_i;\, j=\overline{1,n}.\qquad(15)$$

A fenti egyenletrendszer megoldása adja a (9) egyenletrendszer megoldását a legkisebb négyzetek módszerével, determinisztikus megközelítésben.

A (13), (15) kritériumokat és a (7), (15) egyenleteket összehasonlítva láthatjuk, hogy statisztikus megközelítésben az y_i értékek eltérő mérési pontosságát a mérési hibák szórásnégyzetével vesszük figyelembe. Azonos pontosságú méréseknél ezek a szórásnégyzetek egymással megegyeznek és a (13), (15) egyenletek megegyeznek az (5), (7) egyenletekkel. A (15) egyenleteket értelmezhetjük mint a $z_1, z_2, \ldots, z_k$ mért értékek és az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ becsült jellemzők közötti lineáris kapcsolatrendszert.

Mivel a z mért értékek véletlenek, így az x becsült értékek is véletlenek lesznek. Ezek statisztikai jellemzői a következők [1]:

- az x_j becsült értékek torzítatlanok az ismeretlen X_j értékekhez képest, vagyis $M[x_j] = X_j,\ j = \overline{1,n}$;
- a becslések hibáinak ($\Delta = x_j - X_j,\ j = \overline{1,n}$) szórásnégyzete minimális;
- ha a mérési hibák normál eloszlásúak, akkor a becsült értékek is normál eloszlásúak lesznek.

A gyakorlatban sokszor nem a fő $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jellemzőket kell becsülnünk, hanem azok lineáris függvényét: $S = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n$. (16)

Ezt a függvényt lineáris alaknak, S értékének becslését pedig a fő paraméter lineáris alakja becslésének hívjuk. Az S jellemző optimális becslése ebben az esetben:
$s = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$, ahol $x_1, x_2, \ldots x_n - X_1, X_2, \ldots, X_n$ értékeknek a legkisebb négyzetek módszerével meghatározott optimális becslései. Az s becslés optimális volta abban áll, hogy az torzítatlan, hibája pedig minimális szórásnégyzettel rendelkezik, vagyis
$M[s] = S$ és $D[s - S] = min.$

Korszerű repülőgépek fedélzeti rendszereiben a becslés fentebb meghatározott algoritmusa a fedélzeti számítógépben kerül végrehajtásra. A központi mikroprocesszor műveleti sebessége olyan, hogy az biztosítja a felhasználók megfelelő kiszolgálását.

FELHASZNÁLT IRODALOM

[1] Taraszov, V. G.: *Obrabotka informacii v avtomatyizírovannih szisztyémah upravlényija* (VVIA im. Prof. N. E. Zsukovszkovo, Moszkva, 1974)

[2] Granino A. Korn – Theresa M. Korn: *Matematikai kézikönyv műszakiaknak* (Műszaki Könyvkiadó, Bp., 1975)

[3] I. N. Bronstein – K. A. Szemengyajev: *Matematikai zsebkönyv* (Műszaki Könyvkiadó, Bp., 1987)

[4] Edwin F. Beckenbach: *Modern matematika mérnököknek* (Műszaki Könyvkiadó, Bp., 1965)