HADMÉRNÖK

VIII. Évfolyam 1. szám - 2013. március

Gyarmati József
gyarmati.jozsef@uni-nke.hu

KRITIKUS INFRASTUKTÚRA MODELLEZÉSE DÖNTÉSELMÉLET ÉS JÁTÉKELMÉLET SEGÍTSÉGÉVEL[1]

Absztrakt

A cikk kritikus infrastruktúra modellezésére alkalmas módszereket mutat be. A matematikai modellek alkalmazása gyakorlati példákon keresztül kerülnek bemutatásra. A példák döntéselmélet és játékelmélet segítségével vannak megoldva.

This paper shows eight models which are applicable for modeling critical infrastructure. Solving the problems decision theory and game theory was used. The paper shows the mathematical model and shows practical examples as well.

Kulcsszavak: *kritikus infrastruktúra, modellezés, játékelmélet, döntéselmélet ~ critical infrastructure, modeling, game theory, decision theory*

[1] A tanulmány a TÁMOP-4.2.1.B-11/2/KMR-2011-0001 számú Kritikus infrastruktúra védelmi kutatások című pályázat „Közlekedési kritikus infrastruktúra védelem" kiemelt kutatási terület támogatásával készült

BEVEZETÉS

A tanulmány célja olyan modellek összegyűjtése, amelyek segítségével matematikailag modellezhetővé válik a kritikus infrastruktúra védelme. A modellezés elsősorban azon esetekre vonatkozik, ahol a támadó, illetve a védett értéken rongáló nem intelligens, vagyis nem valamilyen természeti erő. A modellezés alapvető célja ennek megfelelően a védett rendszert támadó és az azt védeni próbáló üzemeltető cselekvéseinek leírása, valamint az egyes cselekvési változatokkal járó következmények, károk értékének előrejelzése.

1. DÖNTÉSELMÉLETI MEGKÖZELÍTÉS

Legyen egy védett objektum, amelyet az üzemeltető az optimális költségen kíván működtetni és legyen egy támadó, amely minél nagyobb kárt akar okozni. Kérdés: milyen mértékű erőforrást szánjon az üzemeltető a védelem kiépítésére és milyen mértékűt a támadó a legnagyobb kár okozás érdekében?

Definíciók

A döntéselméleti modell általános leírását az (1) egyenlet mutatja.

$$\begin{array}{cccccc} & S_1 & S_2 & \dots & S_n & P(T_i) \\ T_1 & K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} & P(T_1) \\ T_2 & K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} & P(T_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & K_{ij} & \vdots & \vdots \\ T_m & K_{m1} & K_{m2} & \dots & K_{mn} & P(T_m) \end{array} \qquad (1)$$

$$\text{és } \sum_{i=1}^{m} P(T_i) = 1,\ i = 1 \dots m,\ j = 1 \dots n.$$

Ahol:

E: védett érték [Ft]

A támadásnak kitett objektum, rendszer, stb., pénzben kifejezett értéken.

S: védelmi szint [%]

Hány százalékkal képes a biztonsági rendszer csökkenteni a támadás hatását.

V: védelmi költség [Ft]

V = f(S, E)

Az adott védelmi szint eléréshez szükséges anyagi erőforrások pénzben kifejezve.

T: támadás [%]

Hány százalékban rombolja a támadó a védett értéket.

C: kár [Ft]

A védett értékben közvetlenül keletkező kár, valamint a védett érték károsodása miatt keletkező közvetett kár.

C = f(E, S, T)

K: összköltség [Ft]

K = C + V

$P(T_i)$ [-]

Adott T_i mértékű támadás bekövetkezésének a valószínűsége.

D_i Döntési kritérium. [-]

Azon szabály, amely alapján az üzemeltető (döntéshozó) választ az alternatívák közül.

1.1. Modell

A védelmi költség a védelmi szint lineáris függvénye:

$$V = m\,E\,S, \tag{2}$$

Ahol m iránytangens az arányossági tényező és $m \in \mathbf{R}^+$. Kifejezi, hogy a védelmi rendszer költsége 100%-os védelem esetén hányad része a védett értéknek.

A kár csak a védett értékben keletkezik közvetett hatások nincsenek. A kár ennek megfelelően a védelmi szint és a támadás lineáris függvénye:

$$C = E\,T\,(100\%\text{-}S) \tag{3}$$

A következmény értékét a (2) és a (3) egyenletekből a következő szerint kell számítani:

$$K_{ij}(T) = C_{ij} + V_{ij} = E{\cdot}T_i{\cdot}(100\%\text{-}S_j) + m{\cdot}E{\cdot}S_j. \tag{4}$$

A támadás bekövetkezéséről, annak várható nagyságáról a rendszer üzemeltetője részéről nem áll rendelkezésre semmilyen információ. A támadás nagysága és a védelmi szint nagysága között nincs összefüggés. (Azon eseteket ahol ez nem áll fenn játékelmélet segítségével lehet modellezni.)

A modell megoldása egy példán keresztül kerül bemutatásra. Legyen E = 100 [mFT], és m = 0,5.

		Védelmi szint			
		25,00%	50,00%	75,00%	100,00%
Támadás	25,00%	31,25	37,5	43,75	50
	50,00%	50	50	50	50
	75,00%	68,75	62,5	56,25	50
	100,00%	87,5	75	62,5	50
Maxi–max	W_j	31,25	37,5	43,75	50
Mini–max	w_j	87,5	75	62,5	50

1. táblázat. Az 1.1. modell döntési táblázata

A modellt a döntéselméletbe alkalmazott rendezés szerint döntési táblázatban mutatja be az 1. táblázat. A döntéshozó jelen esetben a rendszer üzemeltetője, a cselekvési változatait pedig az 1. táblázat oszlopai mutatják. A döntéshozónak a lehetséges védelmi szintek között kell választania. A kiválasztott cselevési változattól –a döntési modell feltételei szerint– függetlenül események következnek be, ez jelen esetben a bekövetkező támadás nagysága. A kiválasztott cselekvési változat, vagyis a rendszer üzemeltetője által meghatározott védelmi szint és a bekövetkező támadás nagysága együttes hatására létrejön a következmény, ami esetünkben a (4) egyenletekből van számítva.

Az üzemeltető számos stratégia szerint választhatja ki a cselekvési változatát. Elsőként tekintsük az un. maxi–max döntési elvet Szentpéteri (1980:36) szerint. Ez az elv egy teljes mértékben optimista döntéshozó gondolkodását írja el. Az optimizmus jelen esetben nem a döntéshozó személyes tulajdonságából fakad, hanem a körülmények csekélyebb mértékű támadásra engednek következtetni. A döntéshozó személyes jellemvonásait már csak azért sem célszerű figyelembe venni, mert a vizsgált helyzet un, csoportos döntési probléma. Nem egy személy üzemelteti a rendszert, hanem egy számos taggal rendelkező szervezet. A végső döntéseket a legtöbb esetben egy személy hozza meg ugyan, de a döntés meghozatala előtt számos más személy véleménye kerül meghallgatásra, vagyis a döntésben több személy értékrendje információja és egyéb személyes attitűdje is szerepel.

A maxi–max elv esetén a döntéshozó feltételezi, hogy bárhogyan is dönt minden esetben a számára legkedvezőbb esemény, jelen esetben legkisebb mértékű támadás következik be. Például ha nem alakít ki védelmet evvel csökkentve a saját költségeit, akkor támadás sem lesz, ha teljes védelmet alakít ki, akkor a támadás is maximális mértékű lesz. A cselekvési változat kiválasztásához az 1. táblázat oszlopaiban meg kell keresni a maximális bevételt, jelen esetben a minimális kiadást:

$$W_j = \min_i\{K_{ij}\} \tag{5}$$

és az így képezett sorból kell kiválasztani a legkedvezőbb értéket, vagyis a maximális bevételt, esetünkben a minimális kiadást:

$$D_1^{\text{opt}} = \min_j\{W_j\} \tag{6}$$

Esetünkben ez az (5) egyenlet szerinti {31,25; 37,5; 43,75; 50} értékekből kiválasztott legkisebb, amit az 1. táblázatban pirossal jelölt érték mutat, mely szerint a legalacsonyabb védelmi szintet kell kialakítani. Figyelembe véve, hogy a védelmi költség lineáris függvény szerint lett képezve, a legkedvezőbb alternatíva, ha a rendszer üzemeltetője egyáltalán nem alakít ki védelmet.

A pesszimista döntéshozó arra számít, hogy minden lehetséges cselekvési változatához képest a legkedvezőtlenebb következményt indikáló esemény fog bekövetkezni. Az előző példát erre a döntési elvre érvényesítve, ha a rendszer üzemeltetője nem alakít ki védelmet, akkor maximális erejű támadás fog bekövetkezni. A cselekvési változat kiválasztásához most oszloponként a legkedvezőtlenebb következményt kell kiválasztani, vagyis a maximális költséget:

$$w_j = \max_i\{K_{ij}\} \tag{7}$$

és az így képzett sorból a legkisebbet:

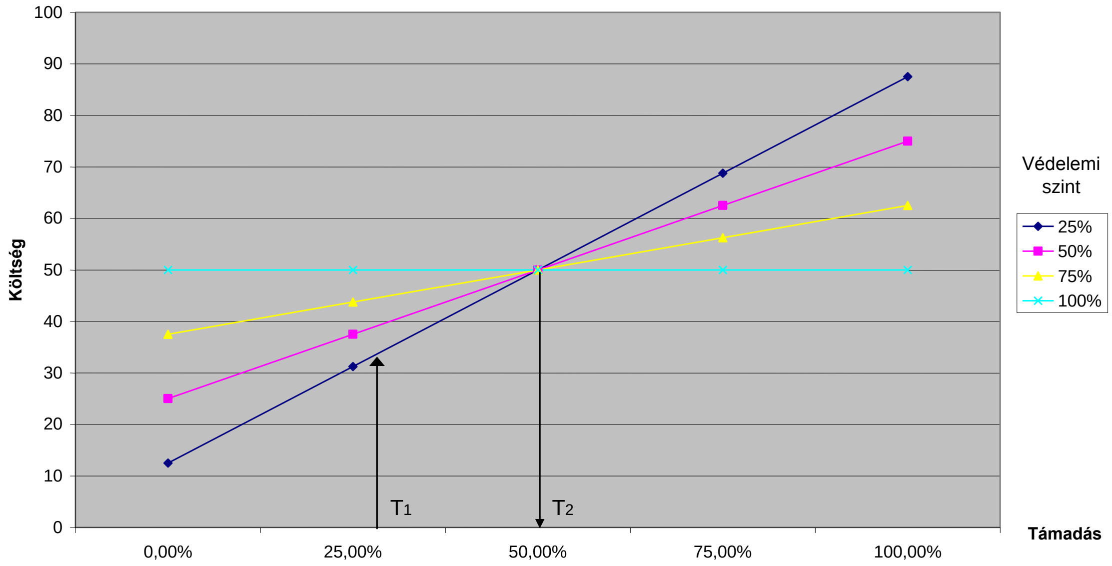
$$D_1^{\text{pesz}} = \min_j\{w_j\}. \tag{8}$$

A döntéselméletben ezt mini–max elvnek nevezik. Az 1. táblázatban kék színnel lett jelölve az így kiválasztott alternatíva.

A két döntési elv szerint a teljesen optimista nem alakít ki védelmet a teljesen pesszimista pedig maximális védelmet alakít ki. Természetesen ezen elvek szerint kiválasztott cselekvési változatokat szélsőségnek kell tekinteni, hiszen teljes mértékben optimista, illetve pesszimista döntéshozó gyakorlatilag nem létezik. Ezen jellemzők finomabb árnyalására alkalmazzák a döntéselméletben az un. Hurwitz kritériumot (Szentpéteri, 1980:37), amely egy $0 \leq \alpha \leq 1$szám segítségével állítja be az optimizmus mértékét és $\alpha = 1$, ha a döntéshozó teljes mértékben optimista. Jelen esetben ehhez egy nagyon hasonló megközelítést alkalmazunk, avval a különbséggel, hogy a döntéshozónak a veszélyeztetettség mértékétől függően a támadás nagyságát kell előre megjósolnia. A védelmi szinteket diszkrét értéknek és a támadás mértékét folytonosnak tekintve, az egyes védelmi szintekhez a (4) egyenlet szerint definiálható a következő függvény:

$$K_j(T) = C_j + V_j = E \cdot T \cdot (100\%\text{-}S_j) + m \cdot E \cdot S_j, \tag{9}$$

ahol T mint a támadás mértéke folytonosnak tekinthető, és az S_j a j-edik védelmi szint nagysága. Ennek megfelelően a lehetséges védelmi szintek számának megfelelő számú, vagyis j darab függvény képezhető. A függvényeket az 1. ábra mutatja.



1. ábra. Az 1.1. modell általános megoldása

A döntéshozónak arra a kérdésre kell válaszolni miszerint: „Milyen mértékben várható támadás?”; vagy „Milyen mértékű a veszélyeztetettség?”. A támadás várható nagysága által meghatározott helyen (1. ábra T_1 = 30%) a legkisebb költségű cselekvési változat görbéjét kell választani, jelen esetben ez a minimális 25%-os védelmi szinthez tartozó görbe. Az 1. ábrából jól látható, hogy amennyiben $T > 50\%$ vagyis inkább vagyunk pesszimisták, akkor maximális védelem, ellenkező esetben minimális védelem szükséges. Általánosan:

$$D_1^{\text{ált}} = \min\{K_j(T)\}. \tag{10}$$

A (10) egyenlet szerinti döntési elv magába foglalja az előző két elvet is, ezért ez a modell mindhárom döntési elvet magába foglaló megoldásának is tekinthető.

1.2. Modell

A védelmi költség a védelmi szint lineáris függvénye:

$$V = m\,E\,S, \tag{11}$$

ahol m iránytangens az arányossági tényező és $m \in \mathbf{R}^+$. Kifejezi, hogy a védelmi rendszer költsége 100%-os védelem esetén hányad része a védett értéknek.

A kár csak a védett értékben keletkezik közvetett hatások nincsenek. A kár ennek megfelelően a védelmi szint és a támadás lineáris függvénye:

$$C = E\,T\,(100\%\text{-}S) \tag{12}$$

A támadás bekövetkezéséről információ áll rendelkezésre a $P(T_i)$ diszkrét valószínűségeloszlás formájában az (1) egyenlet szerint, de ez független a védelmi szinttől.

Az egyes események bekövetkezési valószínűségének ismeretében egyszerűen számítható minden cselekvési változat un. várható pénzértéke, ha a kiválasztott cselekvési változathoz tartozó minden következményértéket szorozzuk a hozzá tartozó valószínűséggel és a szorzatokat összegezzük:

$$M(K_j)= \Sigma_i K_{ij}P(T_i) \tag{13}$$

A legkedvezőbb alternatíva, amelynek a várható összköltsége a legkisebb, vagyis a várható érték sorából a legkisebb értéket kell választani. Képlettel megfogalmazva:

$$D_2^d = \min\{M(K_j)\}. \tag{14}$$

A modell megoldása példán keresztül: legyen E = 100 [mFT], és m = 0,5.

A valószínűségek $P(T_i)$ és $T_i \in \{25\%, 50\%, 75\%, 100\%\}$ ismeretében a döntési táblát a 2. táblázat mutatja.

			Védelmi szint			
		25,00%	50,00%	75,00%	100,00%	$P(T_i)$
Támadás	25,00%	31,25	37,5	43,75	50	0,1
	50,00%	50	50	50	50	0,4
	75,00%	68,75	62,5	56,25	50	0,3
	100,00%	87,5	75	62,5	50	0,2
	$M(K_j)$	61,25	57,5	53,75	50	
	$M_f(K_j)$	37,5	41,6	45,8	50	

2. táblázat. Az 1.2. modell döntési táblázata

Az eredmény 50 (pirossal kiemelve) és a kiválasztott alternatíva a maximális 100%-os védelem.

Amennyiben a támadás nagysága folytonos eloszlású, akkor a várható értéket a következő egyenlettel számíthatjuk Szentpéteri (1980:59) szerint:

$$M_f(K_j) = \int_0^1 K_j(T)\, f(T)\, dT\,, \tag{15}$$

ahol $f(T)$ az eloszlás sűrűségfüggvénye. Legyen az eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(T) = c - m_T\, T \tag{16}$$

alakú lineáris függvény, ahol $m_T \in \mathbf{R}^-$, vagyis a sűrűségfüggvény szigorúan monoton csökkenő [0,1] vizsgált intervallumon belül és $\int_0^1 f(T)dT = 1$.

A (15) egyenletet a (9) és a (16) felhasználásával megoldva valamint behelyettesítve a 1.2. modell konstansait, az egyes védelmi szintekhez tartozó várható következmény értékeket a 2. táblázat utolsó sora mutatja. Csökkenő védelmi szinthez itt csökkenő összköltség tartozik, ami a választott eloszlás és a hozzá tartozó paraméter értékének tudható be.

1.3. Modell

A védelmi költség a védelmi szint négyzetes függvénye:

$$V = m_v\, E\, S^2, \tag{17}$$

ahol m_v arányossági tényező, és $m_v \in \mathbf{R}^+$.

A kár jelen esetben nem csak a védett értékben keletkezik, közvetett hatások is vannak, melyek négyzetesen arányosak a támadás mértékével:

$$C = m_T\, E\, (100\%\text{-}S)T^2 \qquad (18)$$

ahol m_T arányossági tényező, és $m_T \in \mathbf{R}^+$.
A j-edik cselekvési változathoz tartozó összköltségek:

$$K_j\,(T) = m_v\, E\, S^2_j + m_T\, E\, (100\%\text{-}S_j)T^2. \qquad (19)$$

A cselekvési változat kiválasztásához felhasználható az 1.1. modellnél bevezetett (6) és (8) egyenlet szerinti döntési kritérium. Az 1.1. modell (10) egyenlete szerinti elvet alkalmazva a döntési probléma itt is általánosítható:

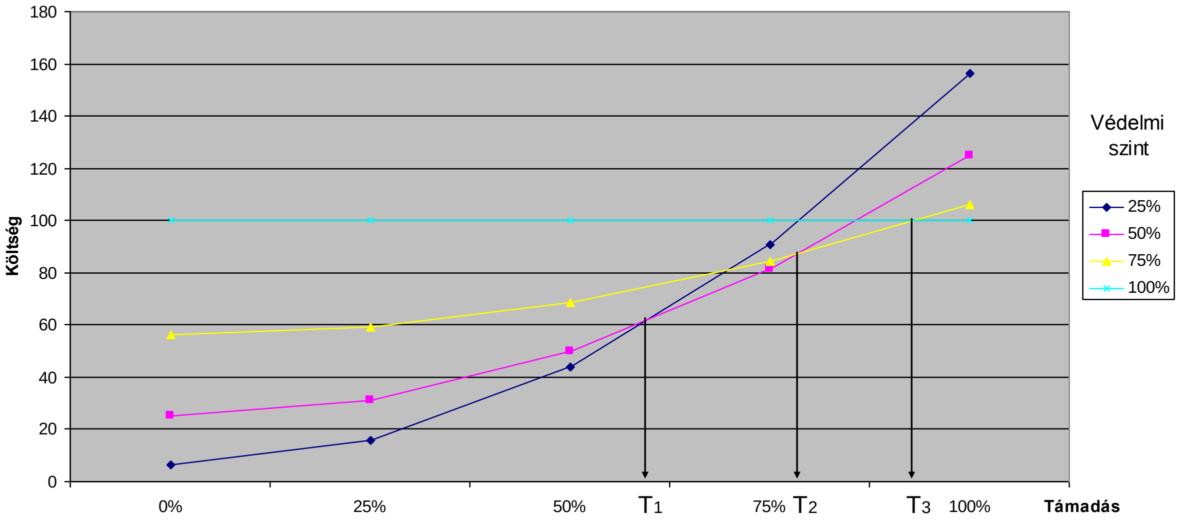
$$D_3 = \min\,\{K_j\,(T)\} \qquad (20)$$

ahol $0\% \leq T \leq 100\%$ és $S_j \in \{25\%, 50\%, 75\%, 100\%\}$.
Egy példán keresztül bemutatva: legyen $m_v = 1$ és $m_T = 2$ és E = 100 mFT.

		Védelem			
		25,00%	50,00%	75,00%	100,00%
Támadás	0%	6,25	25	56,25	100
	25,00%	15,625	31,25	59,375	100
	50,00%	43,75	50	68,75	100
	75,00%	90,625	81,25	84,375	100
	100,00%	156,25	125	106,25	100
	W_j	6,25	25	56,25	100
	w_j	156,25	125	106,25	100

3. táblázat. Az 1.3. modell döntési táblázata

Az értékeket behelyettesítve az (19) egyenletbe a 3. táblázatot kapjuk.
A (6) és a (8) szerinti tisztán optimista és a tisztán pesszimista döntési kritérium alapján a döntéshozó rendre a minimális illetve a maximális védelmi szintet választja, amit a 3. táblázatban piros illetve kék szín jelöl. A megoldás általánosításához az értékeket behelyettesítve a (11) egyenletbe a 2. ábra szerinti $K_j\,(T)$ függvények adódnak.



2. ábra. Az 1.3. modell általános megoldása

A cselekvési változat kiválasztásához, vagyis a védelmi szint nagyságának a meghatározásához a (20) szerint a minimális értékű K_j *(T)* függvényt kell megkeresni. A 2. ábrán jól látható, hogy a támadás nagyságának a függvényében változik a minimális értékeket tartalmazó függvény és a 0-100% támadási intervallumon belül mind a négy lehetséges védelmi szinthez kapcsolódó függvény minimumként jelenik meg. A négy függvény három metszéspontját (T_1 T_2 T_3) kell megkeresni, ahhoz hogy a védelmi szintet egyértelműen hozzá lehessen rendelni a támadás várható szintjéhez. A T_1 értéket a $K_{25\%}(T)= K_{50\%}(T)$, a T_2 értéket a $K_{50\%}(T)= K_{75\%}(T)$, a T_3 értéket pedig a $K_{75\%}(T)= K_{100\%}(T)$ egyenlet megoldásával. Az egyenleteket megoldva a

$$T_1 = 61\%, T_2 = 79\%, T_3 = 94\%,$$

értékek adódnak. Vagyis, ha a támadás elvárt mértéke $T < 61\%$ akkor 25%-os védelmet célszerű kialakítani, ha $61\% \leq T < 79\%$ akkor 50%-os védelmet célszerű kialakítani, ha $79\% \leq T < 94\%$ akkor 75%-os védelmet célszerű kialakítani, ha pedig $T > 94\%$ akkor 100%-os védelmet célszerű kialakítani.

1.4. Modell

A védelmi költség a védelmi szint négyzetes függvénye:

$$V = m_v\, E\, S^2, \tag{21}$$

ahol m_v arányossági tényező, és $m_v \in \mathbf{R}^+$.

A kár jelen esetben nem csak a védett értékben keletkezik, közvetett hatások is vannak, melyek négyzetesen arányosak a támadás mértékével:

$$C = m_T\, E\, (100\%-S) T^2 \tag{22}$$

ahol m_T arányossági tényező, $m_T \in \mathbf{R}^+$. és

$$K_{ij}(T) = C_{ij} + V_{ij} = m_T\, E\, (100\%-S_j)\, T_i^2 + m_v \cdot E \cdot S_j^2\,, \tag{23}$$

A támadás bekövetkezéséről információ áll rendelkezésre. Ismert a $P(T_i)$ diszkrét valószínűségeloszlás, ahol $T_i \in \{25\%, 50\%, 75\%, 100\%\}$. A modell megoldása a 1.2. modellnél leírtakkal egyezik meg eltérés csak a következményértékek számításában van.

$$M(K_j) = \Sigma_i\, K_{ij} P(T_i) \tag{24}$$

$$D_4 = \min\{M(K_j)\}. \tag{25}$$

A példán keresztüli bemutatáshoz felhasználva a 3. modell adatait és az 1.2. modell valószínűségeloszlását a 4. táblázat szerinti eredményekhez jutunk.

		Védelmi szint				
		25,00%	50,00%	75,00%	100,00%	$P(T_i)$
Támadás	25,00%	6,25	25	56,25	100	0,1
	50,00%	15,625	31,25	59,375	100	0,4
	75,00%	43,75	50	68,75	100	0,3
	100,00%	90,625	81,25	84,375	100	0,2
	$M(K_j)$	38,13	46,25	66,88	100	

4. táblázat. Az 1.4. modell döntési táblázata

A 4. táblázat szerint a legkisebb védelmi szint kiépítése látszik a legcélszerűbbnek, összevetve ez a 2. táblázat hasonló döntési modelljével megállapítható, hogy jelen esetben az ott megfigyelt kimenettel szemben teljesen ellenkező döntés meghozatala látszik célszerűnek. Ebből a megfigyelésből csak annyi következtetést célszerű levonni, miszerint az egyes védett objektumok jellege, a keletkező kár nagysága és a képzés formája a döntést akár teljes mértékben megváltoztathatja.

2. JÁTÉKELMÉLETI MEGKÖZELÍTÉS

Definíciók

Legyen A_1, A_2,… A_n védett objektum. A rendszer üzemeltetője korlátozott erőforrásokkal rendelkezik, amely csak az egyik objektum védelmét teszi lehetővé. A rendszert támadó szintén korlátozott erőforrásokkal rendelkezik, amely szintén csak egy objektum támadását teszi lehetővé. A támadó kiválaszt egy objektumot, amelyet megkísérel rongálni, és az üzemeltető is kiválaszt és védelemmel ellát egy objektumot. A két választás együttes hatására valamelyik objektumban valamilyen szintű kár keletkezik. A modell un. kifizetési táblázatát az 5. táblázat mutatja, ahol p_{ij} jelenti az i-edik, és egyben támadott objektumban keletkező kárt, ha az üzemeltető a j-edik objektumot védi és $i, j = 1,\ldots,n$, $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektorok tartalmazzák azon valószínűségeket, amellyel a támadó kiválasztja célpontját, illetve az üzemeltető kiválasztja a védett objektumot. A modellből egyértelműen következik, hogy p_{ij} ott éri el a minimumot, ha $i = j$.

Üzemeltető

		A_1	A_2	…	A_n	**x**
Támadó	A_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1n}	x_1
	A_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2n}	x_2
	A_n	p_{n1}	p_{n2}	...	p_{nn}	x_n
	y	y_1	y_2		y_n	

5. táblázat. Általános játékelméleti modell

2.1. Modell

A kifizetési tábla legyen a 6. táblázat szerinti. A táblázatból látható, hogy nincsenek az egyes alternatívákhoz rendelve valószínűségértékek. Mindkét fél rendelkezik a 6. táblázat információjával és mindkét félről feltételezhető, hogy racionálisan cselekszik, vagyis a Támadó maximálni–, az Üzemeltető pedig minimálni szeretné a kárt, továbbá mindketten ismerik az ellenfelük ezen célját.

Üzemeltető

		A_1	A_2	A_3
Támadó	A_1	1	3	3
	A_2	4	2	4
	A_3	8	8	4

6. táblázat. A 2.1 modell kifizetési táblázata

A 6. táblázatfődiagonálisa tartalmazza a soronkénti legkisebb elemet, ami azt mutatja, hogy akkor keletkezik a legkisebb kár, ha a támadó azt az objektumot támadja, amelyet az Üzemeltető védelemmel is ellát. A fődiagonálison kívüli elemek soronként azonosak, ami abból adódik, ha a támadó egy objektumot támad, de az üzemeltető nem azt védi, akkor már teljesen mindegy, hogy melyik objektum van ellátva védelemmel ugyanakkora kár keletkezik a támadott helyen. A modell így feltételezi az objektumok és a védelmi rendszerek függetlenségét.

A kifizetési táblázat a keletkezett kárt mutatja ennek megfelelően a támadó maximálni, míg az üzemeltető minimálni szeretne. Amennyiben a támadó oldaláról közelítünk észrevehető, hogy az A_3 objektum támadásához tartozó értékek {8, 8, 4} rendre nagyobban az A_1-hez {1, 3, 3} tartozókhoz képest. A támadó függetlenül az üzemeltető döntésétől, minden esetben nagyobb kárt okoz, ha az A_3 –at támadja. Az A_3 dominálja az A_1-et, tehát az A_1 a támadó cselekvési változataiból kizárható. A kifizetési táblázat a 7. táblázat szerint módosul.

Üzemeltető

Támadó	A_1	A_2	A_3
A_2	4	2	4
A_3	8	8	4

7. táblázat. A 2.1. modell módosított kifizetési táblázata

Az üzemeltető viszont ugyanevvel az információval rendelkezik, vagyis Ő is látja, hogy a támadó A_1-et semmiképpen nem fogja támadni ezért a 7. táblázat szerinti kifizetési táblát vizsgálja, amelyből az első sor már törölve van. Ha az üzemeltető 7. táblázat szerinti A_3 objektumot védi, akkor rendre 4–4-et veszíthet, míg ha A_1-et akkor 4–8-at, vagyis a támadótól függetlenül jobban jár, ha az A_3-at védi. A kifizetési táblázatból, ennek megfelelően az első oszlop törölhető (7. táblázat zöld keret). A tovább redukált kifizetési táblázatban a támadó részéről már A_3 dominálja A_2-t vagyis A_2 sora törölhető (7. táblázat kék keret). A végére az üzemeltető részéről marad A_3 illetve A_2 objektum védelme az első esetbe 4-et a második esetben viszont 8-at fizethet, tehát célszerűen az A_3 objektum védelmét választja.

A megoldást jelen esetben minkét fél domináns stratégiák alapján választották, feltételezve, hogy mindkét fél racionális, ami jelen esetben annyi jelent, hogy a támadó maximálni akarja az okozott kárt, míg az üzemeltető ugyanezt minimálni szeretné.

2.2. Modell

Legyen a kifizetési táblázat a 8. táblázat szerint. Összevetve ezt az 5. táblázattal megállapítható, hogy a fődiagonálishoz tartozó elemek soronként a legkisebbek, de a fődiagonálison kívüli elemek soronként nem egyenlők. A védett rendszerek és védelmi berendezések nem függetlenek. Az üzemeltető és a támadó továbbra is racionális, vagyis a maximális kárt illetve a minimális költséget keresik.

Üzemeltető

Támadó	A_1	A_2	A_3	min
A_1	1	2	6	1
A_2	6	4	5	4
A_3	7	2	1	1
max	7	4	5	

8. táblázat. A 2.2. modell kifizetési táblázata

A 8. táblázat alapján megállapítható, hogy sem a támadónak sem pedig a védőnek nincs domináns stratégiája. A modell az 1. modellnél bemutatott szerint nem egyszerűsíthető. A két fél jelen esetben választhat úgy, hogy maximálja a minimális bevételét. A támadó esetében ez a cselekvési változatonkénti minimálisan okozható kár maximálásával érhető el. A támadó soronként kiválasztja a minimumot és az így képzett oszlopból kiválasztja a maximális elemet (**4**).

Az üzemeltető minimálni szeretné a cselekvési változatonkénti maximális kiadását. Ezt úgy éri el, hogy oszloponként kiválasztja a maximális elemet és az így képzett sorból kiválasztja a legkisebbet (**4**).

A 8. táblázatban megfigyelhető, hogy a játékosok a másik fél döntésétől függetlenül nem tudnak javítani a saját helyzetükön. Az üzemeltető nem tudja csökkenteni a kárát, ha az A_1-et választja akkor 6-ra növekszik a költsége, ha A_3-at akkor 5-re. A támadó hasonló helyzetben van, ha megváltoztatja bármilyen irányban az eredeti döntését akkor az okozott kárt fogja csökkenteni 2-re.

A megoldás mindkét esetben az A_2 kiválasztása, a soronkénti minimumok maximuma és az oszloponkénti maximum minimuma megegyezik (**4**), a játékelméletben ezt a pontot nyeregpontnak nevezik, a **4**-et pedig a játék értékének.

2.3. Modell

Legyen a kifizetési táblázat a 9. táblázat szerinti. Alkalmazva előző modellnél bevezetett mini-max stratégiát, minkét félnek az A_3 kiválasztása látszik optimálisnak. A táblázatban viszont megfigyelhetjük, hogy soronkénti minimumok maximuma (**4**) és az oszloponkénti maximum minimuma (**5**) nem egyezik meg, nincs nyeregpont. A játékosok a stratégiájuk változtatásával javíthatnak a pozíciójukon.

Üzemeltető

Támadó	A_1	A_2	A_3	min
A_1	1	3	3	1
A_2	5	2	5	2
A_3	8	8	4	**4**
max	8	8	**5**	

9. táblázat. A 2.3. modell kifizetési táblázata

A támadó felismerheti, hogy A_2-re módosítva növelheti az okozott kárt 4-ről 5-re, ezt viszont az üzemeltető is látja és módosít A_3-ról A_2-re így csökkentve a kiadását 5-ről 2-re. A támadó viszont módosít A_2-ről A_3-ra 8-ra növelve a kárt, az üzemeltető pedig módosít szintén A_3-re így csökkentve a kárt 4-re, és ezzel vissza is értünk a kiinduló pontra. Feltételezve mindkét fél racionalitását mindkét fél rájön arra, hogy a mini-max stratégia itt nem vezet megoldáshoz.

A legjobb megoldás ebben az esetben, ha mind a két fél a másiktól a lehető legjobban rejtve véletlenszerűen választ az érintett, jelen esetben az A_2 és az A_3 stratégiák közül. Abban az esetben, ha a döntési helyzet egymást követően gyakran fordul elő, akkor ügyelni kell arra, hogy az egymást követő döntésekben ne legyen fellelhető olyan minta, ami a másik fél felé információval szolgálhat.

Módosítja a modell megoldását, ha a támadó nem intelligens például valamilyen természeti katasztrófa ellen védekezünk, ebben az esetben az üzemeltető a mini-max kritérium segítségével kiválasztja a védett objektumot és csak annak tartja fenn a védelmét, amivel minimálhatja a maximális veszteségét.

2.4. Modell

Legyen a kifizetési táblázat a 10. táblázat szerinti. A táblázat alapján megállapítható, hogy a játéknak nincs értéke.

Üzemeltető

		A_1	A_2	A_3	min
Támadó	A_1	1	5	5	1
	A_2	6	2	6	2
	A_3	7	7	3	**4**
	max	8	8	**5**	

10. táblázat. A 2.4. modell kifizetési táblázata

A soronkénti minimumok maximuma, vagyis az alsó érték nem egyezik meg az oszloponkénti maximumok minimumával, vagyis a felső értékkel. A megoldás ebben az esetben az, hogy véletlenszerűen választunk az egyes stratégiák közül. Kérdésként viszont felmerülhet, hogy létezik-e olyan eloszlása **x** és **y** vektoroknak (5. táblázat) amellyel a játékosok minimálhatják maximális kiadásaikat. A feladat a (26) (27) szerinti lineáris programozási feladat segítségével oldható meg, a levezetést Hiller (1994:302) részletesen bemutatja.

A Támadó által maximalizálandó:

$$\mathbf{p}_i\,\mathbf{x} - \mathbf{x}_{n+1} \geq \mathbf{0} \tag{26}$$

$$\max\{x_{n+1}\}$$

Az Üzemeltető által minimalizálandó:

$$\mathbf{p}_i^T\,\mathbf{y} - \mathbf{y}_{n+1} \geq \mathbf{0} \tag{27}$$

$$\min\{y_{n+1}\}$$

ahol $\mathbf{p}_i$ a $\mathbf{P} = [p_{ij}]$ mátrix oszlopvektorai, $\mathbf{p}_i^T$ pedig $\mathbf{P}$ sorvektorainak transzponáltja, és $x_1 + x_2 +,\dots,+x_n = 0$, $y_1 + y_2 +,\dots,+y_n = 0$. $\mathbf{x}_{n+1}$ és $\mathbf{y}_{n+1}$ pedig x_{n+1} y_{n+1} változókból álló *n*-elemű vektor.

A 10. táblázat konstansait felhasználva a megoldás:

$$\mathbf{x}^T\ [0;\ 0{,}77;\ 0{,}23]$$

$$\mathbf{y}^T\ [0{,}08;\ 0{,}34;\ 0{,}58]$$

3. KÖVETKEZTETÉS

A felsorolt modellek alapján megállapítható:

– a támadó és a üzemeltető cselekvése döntéselmélet és játékelmélet segítségével modellezhető;
– számos modell és a esetenként a modellek számos megoldása áll a rendelkezésre;
– a modellek pontossága, vagyis az alkalmazhatóság megállapításához további vizsgálatok szükségesek.

Felhasznált irodalom

[1] Hiller, F. S., Lieberman, G. J. Bevezetés az operációkutatásba LSI Oktatóközpont, Budapest 1994, ISBN 963 577 1347

[2] Szentpéteri, Sz. Gazdasági döntések bizonytalanság esetén, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó Budapest 1980 ISBN 963 220 944 3