

Szabolcsi Róbert
szabolcsi.robort@uni-nke.hu

UAV AUTOMATIKUS REPÜLÉSSZABÁLYOZÓ RENDSZER SZÁMÍTÓGÉPES TERVEZÉSE

Absztrakt

A légi robotok egyre szélesebb körben alkalmazott eszközök úgy a polgári, mint a katonai alkalmazások területén. A légi robotok repülésének számos fázisa automatizálható a kereskedelmi forgalomban is beszerezhető eszközök segítségével. Az UAV fedélzeti eszközök azonban utólagos hangolásra készítetik az alkalmazókat. A hangolások, az előzetes szabályozótervezések során számos módszer használható, mint a heurisztikus módszer, a szabályozók tapasztalati beállítása, analitikus módszerek, illetve számítógépes szabályozótervezés. Az UAVk közül a multirotoros légi járművek repülésszabályozásával foglalkozik a cikk. A quadrotor elrendezésű légi járművek függőleges tengely mentén történő mozgásának automatizálása biztosítja az automatikus magasságváltoztatás lehetőségét.

Robots are widely applied tools applied both in military and non-military missions. Leaning on theirs possibilities they allow executing missions impossible for human beings, i.e. in dangerous missions. The article deals with automation of the flight phases of the unmanned aerial vehicles (UAV). From large scale of available UAVs author will deal with multirotors. The spatial motion of the quadrotors will be investigated, and first solutions will be examined in vertical motion of the quadrotors.

Kulcsszavak: *katonai robotok, felderítő felszíni robotok, légi robotrendszerek, számítógépes tervezés ~ military robots, reconnaissance surface robots, air robot systems, CAD*

1. BEVEZETÉS, MOTIVÁCIÓ

A robotika, és a mechatronika legújabb tudományos eredményei alapján tervezett robotok katonai alkalmazása egyre szélesebb körű. A robotika területeiről a légi-, és a felszíni kutatórobotok alkalmazása már széleskörű, mindazonáltal a jelenlegi alkalmazási területeken kívül számos új alkalmazási terület is nyílik. A felderítő UAV alkalmazások során számos esetben merül fel a repülés automatizálásának szükségessége. Az automatizálás olyan távlatokat nyit, amelyeket az ember nem képes létrehozni. A repülésautomatizálás javítja az UAV stabilitási-, és irányíthatósági tulajdonságait, valamint megfelelő minőséget is biztosít. A repülés számos fázisa automatizálható, sőt, gyenge stabilitási jellemzőkkel bíró UAVk esetén ez szükséges is. A leggyakrabban automatizált repülési üzemmódok az Euler-szögek stabilizálása, pályavezérlő üzemmódok (pl. fészállás, leszállás, magasságstabilizálás, sebességstabilizálás). A cikkben a szerző olyan repülési fázis automatizálását veszi górcső alá, amely légi felderítés esetén különösen fontos. Ez az üzemmód a multirotoros UAV függésének szabályozása. Ezen üzemmódon a repülési magasság állandó értéken tartása a szabályozás célja, míg a hossz-, és a kereszt-tengelyek mentén a koordináta-változás zérusértékű, míg a tranzien folyamatok során a minőségi jellemzők megegyeznek az előre definiált jellemzőkkel.

2. SZAKIRODALOM ÁTTEKINTÉSE, TUDOMÁNYOS ELŐZMÉNYEK

A légi járművek térbeli mozgásának matematikai modellezésével, valamint az automatikus repülésszabályozó rendszerek előzetes tervezésével az [1, 2] irodalmak foglalkoznak. Pilóta nélküli repülőgépek katonai-, és nem-katonai alkalmazásának lehetőségeivel a szerző által publikált [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] cikkek foglalkoznak részletesen. A szerző a felhasználói oldalról mutatta be az UAV-kal szemben támasztott irányíthatósági-, kormányozhatósági-, és a stabilitási követelményeket. E minőségi jellemzők szabványa a [12] szabvány. Multirotoros (quadrotor) légi járművek mozgásának modellezésével, és a térbeli mozgásának automatizálásával a [10, 11] irodalmak foglalkoznak. A szerző bemutatta az optimális szabályozótervezés elméleti hátterét, és példán keresztül mutatta be a súlyozó mátrixok gyakorlati alkalmazását.

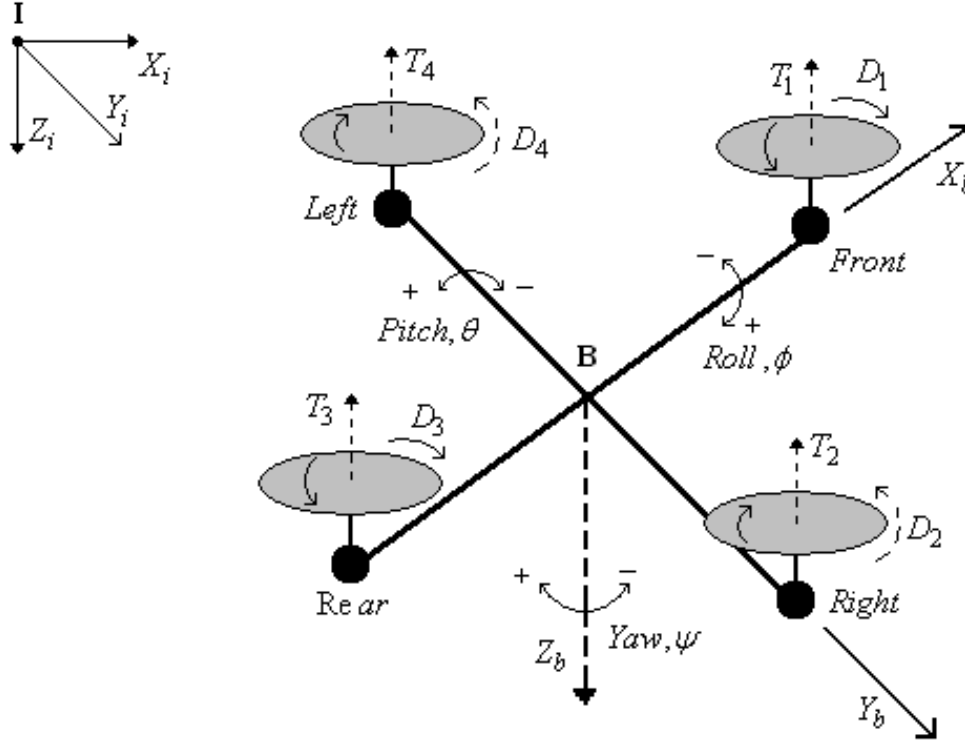
3. A QUADROTOR TÉRBELI MOZGÁSÁNAK DINAMIKUS MODELLJE [10, 11]

A Quadrotor sajátos aerodinamikai elrendezést jelent: a tartószerkezet végein elhelyezett villamos motorok közvetlenül hajtják a légcsavarokat, amelyek beállítási szöge nem változtatható. A motorok fordulatszámát egyenként is változtatható ebben az elrendezésben, így a négyrotoros légi jármű helyből felszálló, VTOL¹-képesekkel rendelkezik, valamint jó kormányozhatósági-, és irányíthatósági jellemzőkkel bír. A négyrotoros UAV dinamikus modelljét határozzuk meg az 1. ábra segítségével [10, 11]. Könnyen belátható, hogy az egyes tengelyeken elhelyezett motorok azonos irányban, vagy az óramutató járásával azonos, vagy azzal ellentétes irányban forognak, így az eredő reaktív nyomaték hatását sikerül kiküszöbölni.

„Függés” repülési helyzetben mind a négy motor fordulatszámát azonos, így a függőleges tengely mentén a manőverezést a négy motor fordulatszámának azonos mértékű, és azonos irányú megváltoztatásával tudjuk elérni. A bólintás, és a megfelelő oldalirányú mozgás létrehozására az 1, és a 3 motorok fordulatszámát ellentétes értelemben kell megváltoztatni. A bedöntési szög, és a megfelelő oldalirányú mozgás létrehozása a 2, és a 4 motorok

¹ VTOL: Vertical Take-off and Landing

fordulatszámának ellentétes értelmű megváltoztatásával lehetséges. A legyező szög megváltoztatásához az egyes tengelyeken elhelyezett motorok fordulatszámának azonos, de a másik tengelyen elhelyezett motorokkal ellentétes értelmű megváltoztatása szükséges: így a reaktív nyomaték kiegyensúlyozatlansága miatt a quadrotor elfordul a függőleges tengely körül.



1. ábra. A négyrotoros UAV dinamikus viselkedése

Az 1. ábrán **I** jelöli az inercia(vonatkoztatási) rendszert, míg **B** jelöli a légi járműhöz rögzített „test” koordináta-rendszert. A légi jármű „test” koordináta-rendszerben mért Euler-szögeinek változási sebessége az alábbi módon írható fel:

$$[\phi \quad \theta \quad \psi]^T = \mathbf{M}^{-1}[\omega_{x_i} \quad \omega_{y_i} \quad \omega_{z_i}]^T = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}[\omega_{x_b} \quad \omega_{y_b} \quad \omega_{z_b}]^T, \quad (3.1)$$

ahol: ϕ bedöntési szög; θ bólintási szög; ψ irányyszög; ω_{x_i} szögsebességek az inercia-rendszerben; ω_{x_b} szögsebességek a „test” koordináta rendszerben; valamint:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{c\psi}{c\theta} & \frac{s\psi}{c\theta} & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & c\psi s\theta s\phi - s\psi c\phi & c\psi s\theta c\phi - s\psi s\phi \\ s\psi c\theta & s\psi s\theta s\phi + c\psi c\phi & s\psi s\theta c\phi - c\psi s\phi \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} - \text{forgatómátrixok,}$$

ahol: $c = \cos$, $s = \sin$.

Tekintettel arra, hogy számunkra a későbbi feladatok megoldása miatt csak a „test” koordináta-rendszer **B** pontjának a sebessége a szabályozandó paraméter, ezért a „test” koordináta-rendszerben mért sebességeket az alábbi egyenlettel határozhatjuk meg [10, 11]:

$$[\dot{x}_b \quad \dot{y}_b \quad \dot{z}_b]^T = \mathbf{A}^{-1}[\dot{x}_i \quad \dot{y}_i \quad \dot{z}_i]^T, \quad (3.2)$$

ahol x_b, y_b, z_b koordináták a test-koordináta rendszerben, és x_i, y_i, z_i koordináták az inercia(referencia) koordináta rendszerben.

3.1. A quadrotor egyenesvonalú mozgásegyenletei

A mozgásegyenletek levezetése során feltételezzük, hogy

- a quadrotor szerkezete merev, és szimmetrikus;
- a quadrotor tömegközéppontja a \mathbf{B} pontban helyezkedik el (l. 1. ábra);
- a légcsavar-lapátok merev szerkezetek, és a quadrotor nem végez bólintó mozgást.

Az i -edik légcsavarlapát által létesített felhajtóerő arányos az adott légcsavar forgási sebességének négyzetével, vagyis:

$$T_i = C_1 \left(\frac{1 - 2\pi LCS}{P\alpha_i} + 2\pi \frac{\dot{z}_b - w_{z_b}}{P\alpha_i} \right), \quad (3.3)$$

ahol: $C_1 = k_t \rho A_p \alpha_i^2 R_p^2$; k_t aerodinamikai felhajtóerő tényező; ρ a levegő sűrűsége; A_p a légcsavar felülete; α_i az i -edik légcsavar szögsebessége; R_p a légcsavar sugara; L a légcsavar középpontjának távolsága az origótól; P a légcsavarlapátok beállítási szöge, és végül, w_{z_b} a légköri turbulencia vektorának z -tengelyre eső vetülete. $C=1$, ha $i=1$, vagy $i=4$. $C=-1$, ha $i=2$, vagy $i=3$. $S = \omega_{y_b}$, ha $i=1$, vagy $i=3$. $S = \omega_{x_b}$, ha $i=2$, vagy $i=4$.

A légi jármű hossz tengelye mentén ható erők eredője az alábbi egyenlettel írható le [10, 11]:

$$F_{wl} = \mathbf{A} \left[k_s (w_{x_b} - \dot{x}_b) \quad k_s (w_{y_b} - \dot{y}_b) \quad k_u (w_{z_b} - \dot{z}_b) \right]^T, \quad (3.4)$$

ahol: k_s, k_u az egyenesvonalú mozgás súrlódási együtthatói; w_{x_b} és w_{y_b} a légköri turbulencia vektorának x - és y -tengelyekre eső vetületei, értelemszerűen.

A quadrotor térbeli lineáris mozgásának állapot-egyenlete a következő mátrixos alakban is megadható [10, 11]:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{y}_i \\ \ddot{z}_i \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \omega_{x_b} \\ \omega_{y_b} \\ \omega_{z_b} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{z}_i \end{bmatrix} + \mathbf{g} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{F_{wl}}{m} - \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}{m} \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

ahol: g a nehézségi gyorsulás, m a légi jármű tömege.

3.2. A quadrotor forgómozgásának egyenletei

Ismeretes, hogy a légcsavarlapátok légellenállásból származó nyomatéka arányos a légcsavarlapát forgási sebességének a négyzetével, vagyis [10, 11]:

$$D_i = C_2 \left(\frac{1 - 2\pi LCS}{P\alpha_i} + 2\pi \frac{\dot{z}_b - w_{z_b}}{P\alpha_i} \right), \quad (3.6)$$

ahol: $C_2 = k_d \rho A_p \alpha_i^2 R_p^3$; k_d a nyomatéki együttható.

A légsavarlapátok eredő reakciónyomatéka az alábbi egyenlettel írható le:

$$I_{ct} = J_p(-\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_3 + \dot{\alpha}_4), \quad (3.7)$$

ahol: J_p egy légsavarlapát tehetetlenségi nyomatéka.

A súrlódási terhelő nyomatékot az alábbi egyenlet alapján is számíthatjuk:

$$\mathbf{M}_f = k_r [\dot{\phi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi}]^T, \quad (3.8)$$

ahol: k_r a súrlódási együttható.

A légi jármű motorjának forgórészére redukált nemirányítható zavarások (pl. légköri turbulencia) a következő összefüggéssel írható le:

$$\tau_d = [\tau_{x_b} \quad \tau_{y_b} \quad \tau_{z_b}]^T, \quad (3.9)$$

A légi jármű giroszkópikus nyomatéka a következő egyenlettel írható le:

$$\mathbf{M}_g = J_p [\dot{\theta}\alpha \quad \dot{\phi}\alpha \quad 0]^T, \quad (3.10)$$

ahol: $\alpha = -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4$.

Mindezek alapján, a quadrotor térbeli forgómozgásának állapot-egyenlete a következő mátrixos alakban is megadható [10, 11]:

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_{x_b} \\ \dot{\omega}_{y_b} \\ \dot{\omega}_{z_b} \end{bmatrix} = -J^{-1} \omega \times J \begin{bmatrix} \omega_{x_b} \\ \omega_{y_b} \\ \omega_{z_b} \end{bmatrix} - J^{-1} (\mathbf{M}_f + \tau_d + \mathbf{M}_g) + J^{-1} \begin{bmatrix} L(T_4 - T_2) \\ L(T_1 - T_3) \\ D_1 - D_2 + D_3 - D_4 + I_{ct} \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

ahol: $\omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z_b} & \omega_{y_b} \\ \omega_{z_b} & 0 & -\omega_{x_b} \\ -\omega_{y_b} & \omega_{x_b} & 0 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix}$ a főtehetetlenségi mátrix; J_{xx} , J_{yy} ,

J_{zz} a hossz-, a kereszt-, és a függőleges tengelyre vett főtehetetlenségi nyomatékok, értelemszerűen.

3.3. A quadrotor egyenáramú motorjának dinamikája

Ismeretes, hogy az egyenáramú motor – kis értékű motor induktivitások esetén – dinamikus egyenlete a következő alakban írható fel:

$$J_p \dot{\alpha}_i = G \tau_{m_i} - D_i, \quad (3.12)$$

ahol: $\tau_{m_i} = \left(k_i (V_i - \frac{k_v \alpha_i}{G}) R^{-1} \right)$ a motor dinamikus gyorsító nyomatéka; k_i a motor állandója; k_v a motor forgási sebesség állandója; V_i a motor vezérlő feszültsége; R a motorellenállás; G a „motor-légcsavar” rendszer áttételi száma.

Vizsgáljuk kismagasságú függés repülési helyzetben a quadrotor dinamikáját, ha a függőleges tengely mentén kell emelkedő mozgást végrehajtania. A kiindulási feltételek – zavarásmentes esetre – most az alábbiak lesznek:

$$\theta = 0^\circ; \phi = 0^\circ; \psi = 0^\circ; v_{x_{b_0}} = 0m/s; v_{y_{b_0}} = 0m/s; v_{z_{b_0}} = 0m/s, \quad (3.13)$$

A (3.1)–(3.5) egyenleteket felhasználva, a (3.13) kezdeti feltételek figyelembe vételével a quadrotor függőleges tengely mentén végrehajtott mozgásának dinamikus egyenlete az alábbi alakban írható fel:

$$\ddot{z}_b = \frac{F_{mI}}{m} - \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}{m} + g, \quad (3.14)$$

vagy más alakban:

$$\ddot{z}_b + \frac{\dot{z}_b}{m} = g - \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}{m} = g - \frac{4T}{m}, \quad (3.15)$$

Az egyes rotorlapátok felhajtóereje az alábbi egyenlettel adható meg:

$$T = C_1 \left(\frac{1}{P\alpha_i} + 2\pi \frac{\dot{z}_b}{P\alpha_i} \right), \quad (3.16)$$

ahol: $C_1 = k_t \rho A_p \alpha_i^2 R_p^2 = 4,15872 \cdot 10^{-6} \alpha_i^2$.

Helyettesítsük be a (3.16) egyenletet a (3.15) egyenletbe:

$$\ddot{z}_b + \frac{\dot{z}_b}{m} = g - \frac{4T}{m} = g - \frac{4}{m} C_1 \left(\frac{1}{P\alpha_i} + 2\pi \frac{\dot{z}_b}{P\alpha_i} \right), \quad (3.17)$$

és rendezzük a kapott egyenletet:

$$\ddot{z}_b + \frac{\dot{z}_b}{m} + \frac{4}{m} C_1 2\pi \frac{\dot{z}_b}{P\alpha_i} = g - \frac{4}{m} C_1 \frac{1}{P\alpha_i}, \quad (3.18)$$

valamint további rendezéssel a következő összefüggésre jutunk:

$$\ddot{z}_b + \dot{z}_b \left(\frac{1}{m} + \frac{4}{m} C_1 2\pi \frac{1}{P\alpha_i} \right) = g - \frac{4}{m} C_1 \frac{1}{P\alpha_i}. \quad (3.19)$$

Egy hipotetikus quadrotor paramétereinek felhasználásával a (3.19) egyenlet a következő alakban írható fel [10, 11]:

$$\ddot{z}_b + \dot{z}_b (0,222568 + 153,0451369 \cdot 10^{-6} \alpha_i) = 9,81 - 24,35789 \cdot 10^{-6} \alpha_i. \quad (3.20)$$

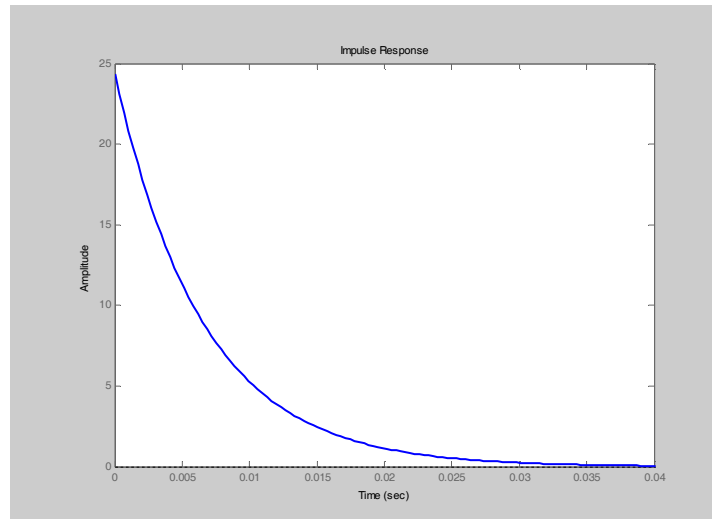
Legyen $\alpha_i = 1000 \text{ ford} / p$. Akkor a függőleges sebesség változását az alábbi egyenlet adja meg:

$$\dot{v}_b + v_b 153,2677049 = 9,81 - 24,35789 \Delta \alpha_i. \quad (3.21)$$

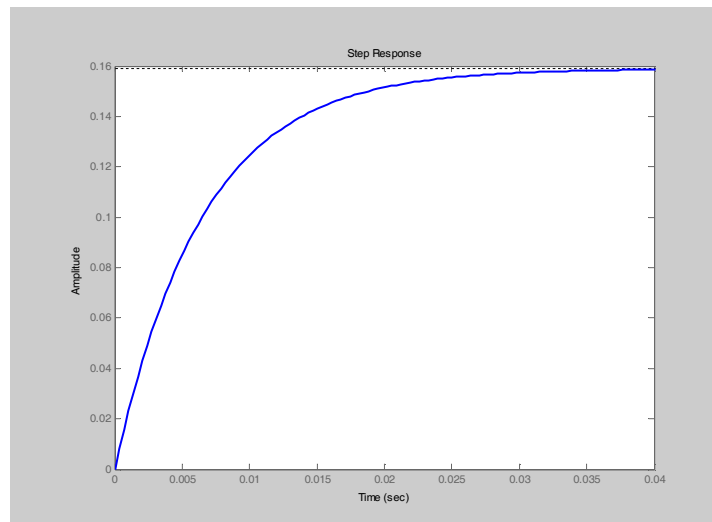
A (3.21) egyenlet alapján a quadrotor átviteli függvénye a következő lesz:

$$Y(s) = \frac{v_b(s)}{\Delta\alpha_i(s)} = -\frac{24,35789}{153,2677049 + s}. \quad (3.22)$$

A továbbiakban vizsgáljuk meg a quadrotor viselkedését idő-, és frekvenciatartományban. A számítógépes szimuláció eredménye a 2. ábrán látható. A 2. ábra alapján megállapíthatjuk, hogy a quadrotor gyorsan reagál a bemenetekre, képes nagy sebességgel reagálni a gerjesztő jelre, és állandó sebességgel emelkedni (2.b. ábra). A súlyfüggvény állandósult állapotban zérushoz tart, így az irányított quadrotor stabilis viselkedésű.



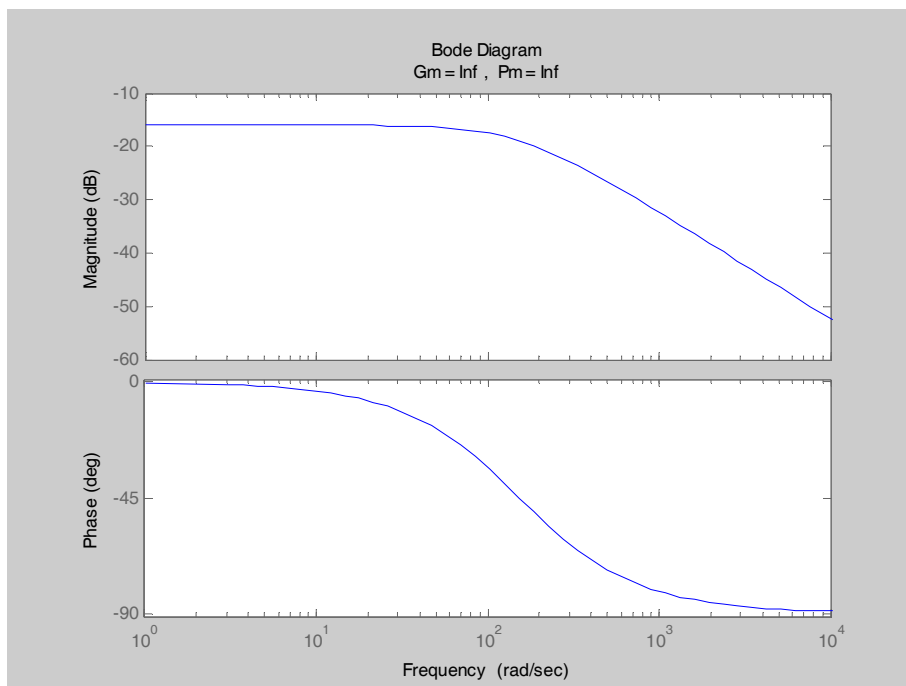
a) Súlyfüggvény



b) Átmeneti függvény

2. ábra Számítógépes analízis eredménye.

A 3. ábrán a quadrotor frekvenciatartománybeli viselkedése látható. A 3. ábrán jól látható, hogy a quadrotor alul-áteresztő jelleggel viselkedik, nagyfrekvenciás tartományban „levágja” a bemeneti jeleket, jól szűri a nagyfrekvenciás zajokat. Úgy az erősítési-, mint a fázistartalék végtelen értékű.



3. ábra. Viselkedés frekvenciatartományban – Bode diagram.

4. LQ-ALAPÚ SZABÁLYOZÓTERVEZÉS QUADROTOR FÜGGŐLEGES TÉRBELI MOZGÁSÁNAK AUTOMATIZÁLÁSA

Lineáris, autonóm szabályozási rendszer állapot-, és a kimeneti egyenletet az alábbi alakban szokás megadni [1, 2, 10, 11]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}; \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}, \quad (4.1)$$

ahol: \mathbf{x} állapotvektor, \mathbf{u} bemeneti vektor, \mathbf{y} kimeneti vektor, \mathbf{A} állapotmátrix, \mathbf{B} bemeneti mátrix, \mathbf{C} kimeneti mátrix és \mathbf{D} segédmátrix.

Többváltozós állandó paraméterű irányított rendszer esetében a minimálandó funkcionált az alábbi egyenlettel szokás megadni [1, 2]:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \rightarrow \text{Min}, \quad (4.2)$$

ahol: \mathbf{Q} pozitív definit (vagy pozitív szemidefinit) diagonális súlyozó mátrix, \mathbf{R} pozitív definit diagonális súlyozó mátrix. A szabályozótervezés során a súlyozó mátrixok beállítására az ún. azonos(egységnyi) súlyozás elvét, vagy a reciproknégyzetes szabályt is alkalmazhatjuk, majd a mátrixok finomhangolását hajtjuk végre.

Ha a \mathbf{Q} felülsúlyozott az \mathbf{R} mátrixhoz képest, akkor a zárt szabályozási rendszer minőségi jellemzői változnak lényeges mértékben. Ha az \mathbf{R} mátrix túlsúlyozott a \mathbf{Q} mátrix elemeihez képest, akkor a szabályozás nagy energiaigényű lesz [1, 2, 10, 11]. Az integrálandó $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$ kvadratikus alak a minőségi jellemzőkről hordoz információt, míg az $\mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}$ kvadratikus alak a költségeket jellemzi.

Ezek a tagok skalár mennyiségek, mivel:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = [x_1 \ \dots \ x_n] \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & q_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1 \ \dots \ x_n] \begin{bmatrix} q_1 x_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ q_n x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n q_i x_i^2(t), \quad (4.3)$$

valamint

$$\mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} = [u_1 \ \dots \ u_n] \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & r_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} = [u_1 \ \dots \ u_n] \begin{bmatrix} r_1 u_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ r_n u_n \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n r_j u_j^2(t), \quad (4.4)$$

A (4.3) és a (4.4) egyenletek alapján azt mondhatjuk, hogy a (4.2) integrálkritérium az $x_i^2(t)$ és az $u_j^2(t)$ görbék alatti területet minimálja.

4.1. Az elfajult Ricatti-féle mátrixegyenlet

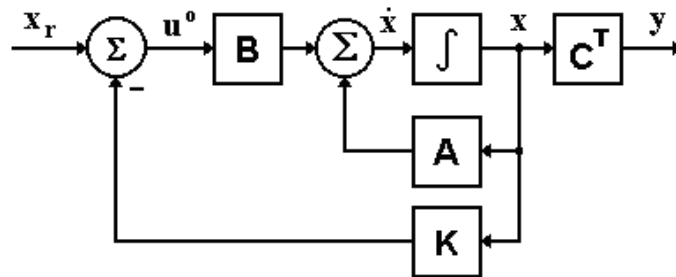
Tekintsük adottnak a vizsgált rendszer állapotegyenletét [1, 2]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}. \quad (4.5)$$

Az optimális vezérlési törvény [1, 2, 10, 11]:

$$\mathbf{u}^0(t) = -\mathbf{K} \mathbf{x}(t) \quad (4.6)$$

alakú, amely biztosítja a (4.2) négyzetes integrálkritérium minimális értékét. Az optimálási feladat megoldottnak tekinthető bármely $\mathbf{x}(0)$ kezdeti értékre, ha ismertek a \mathbf{K} mátrix elemei. Az optimális szabályozási rendszer hatásvázlata a 4. ábrán látható. A referencia jel legyen zérusértékű, vagyis, $x_r(t) = 0$.



4. ábra. A teljes állapot-visszacsatolású rendszer hatásvázlata.

Helyettesítsük a (4.6) egyenletet a (4.5) állapotegyenletbe. A következő egyenletet kapjuk:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) \mathbf{x}. \quad (4.7)$$

A továbbiakban feltételezzük, hogy az $(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})$ mátrix sajátértékei negatív valós részesek. Helyettesítsük a (4.7) egyenletet a (4.2) egyenletbe:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} \mathbf{x}) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} dt \rightarrow \text{Min}. \quad (4.8)$$

A (4.2) integrálkritérium minimálásához Ljapunov második, közvetlen módszerét használjuk. Feltételezzük, hogy bármely \mathbf{x} állapotvektorhoz rendelhető egy valós elemű \mathbf{P} pozitív definit Hermite-mátrix, amelyre igaz, hogy $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$. Ebben az esetben igaz, hogy:

$$\mathbf{x}^T(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T\mathbf{R}\mathbf{K})\mathbf{x} = -\frac{d}{dt}(\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}). \quad (4.9)$$

Az $\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$ kvadratikus alak deriválása és a (4.9) egyenlet felhasználása után kapjuk, hogy:

$$\mathbf{x}^T(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T\mathbf{R}\mathbf{K})\mathbf{x} = -\mathbf{x}^T\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{P}\mathbf{x} = -\mathbf{x}^T[(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^T\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})]\mathbf{x}. \quad (4.10)$$

Ljapunov második közvetlen módszere szerint, ha az $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$ mátrix sajátértékei negatív valós részűek, akkor $\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T\mathbf{R}\mathbf{K}$ pozitív definit mátrix esetén létezik olyan pozitív definit \mathbf{P} mátrix, amelyre igaz, hogy:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^T\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) = -(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T\mathbf{R}\mathbf{K}). \quad (4.11)$$

A (4.11) egyenletet szokás Ljapunov-féle mátrix egyenletnek nevezni. A négyzetes integrálkritérium most a következő alakban adható meg:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T\mathbf{R}\mathbf{K})\mathbf{x} dt = -\left[\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}\right]_0^{\infty} = -\mathbf{x}^T(\infty)\mathbf{P}\mathbf{x}(\infty) + \mathbf{x}^T(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0). \quad (4.12)$$

Mivel az $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ mátrix sajátértékei negatív valós részűek, ezért $\mathbf{x}(\infty) \rightarrow 0$. A (4.12) egyenlet a következő alakban írható fel:

$$J = \mathbf{x}^T(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0). \quad (4.13)$$

Mint az a (4.13) egyenletből látszik, a (4.12) integrálkritérium függ az $\mathbf{x}(0)$ kezdeti feltételtől is. Korábbról ismeretes, hogy az \mathbf{R} mátrix valós elemű pozitív definit Hermite-féle hermetikussá mátrix, ezért igaz, hogy:

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}^T\mathbf{T}. \quad (4.14)$$

ahol \mathbf{T} nonszinguláris (reguláris) mátrix.

A (4.14) egyenlet figyelembevételével a (4.11) egyenletet a következő módon írhatjuk fel:

$$(\mathbf{A}^T - \mathbf{K}^T\mathbf{B}^T)\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) + \mathbf{Q} + \mathbf{K}^T\mathbf{T}^T\mathbf{T}\mathbf{K} = 0. \quad (4.15)$$

Elvégezve a (4.15) egyenlet kijelölt műveleteit, kapjuk, hogy:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + (-\mathbf{K}^T\mathbf{B}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{K} + \mathbf{K}^T\mathbf{T}^T\mathbf{T}\mathbf{K}) + \mathbf{Q} = 0. \quad (4.16)$$

Felhasználva, hogy $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$, valamint $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{T}^T)^{-1}$, a zárójelben álló kifejezés tovább alakítható:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^T\mathbf{T}^T\mathbf{T}\mathbf{K} - \mathbf{K}^T\mathbf{B}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{K} &= \mathbf{K}^T\mathbf{T}^T\mathbf{T}\mathbf{K} - \mathbf{K}^T\left[\mathbf{T}^T(\mathbf{T}^T)^{-1}\right]\mathbf{B}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}^T\mathbf{B}\mathbf{K} + (\mathbf{P}^T - \mathbf{P})\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = \\ &= \mathbf{K}^T\mathbf{T}^T\mathbf{T}\mathbf{K} - \mathbf{K}^T\mathbf{T}^T(\mathbf{T}^T)^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}^T\mathbf{B}(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T})\mathbf{K} + \mathbf{P}^T\mathbf{B}\left[\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{T}^T)^{-1}\right]\mathbf{B}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = \\ &= \left[\mathbf{K}^T\mathbf{T}^T - \mathbf{P}^T\mathbf{B}\mathbf{T}^{-1}\right]\left[\mathbf{T}\mathbf{K} - (\mathbf{T}^T)^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\right] - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = \\ &= \left[\mathbf{T}\mathbf{K} - (\mathbf{T}^T)^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\right]^T\left[\mathbf{T}\mathbf{K} - (\mathbf{T}^T)^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\right] - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} \end{aligned} \quad (4.17)$$

A (4.16) egyenlet most az alábbi alakban írható fel:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \left[\mathbf{T} \mathbf{K} - (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \right]^T \left[\mathbf{T} \mathbf{K} - (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \right] - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0. \quad (4.18)$$

A négyzetes integráلكritérium minimálása, vagyis az optimális vezérlési törvény \mathbf{K} teljes állapot-visszacsatolási mátrixának meghatározása gyakorlatilag az

$$\mathbf{x}^T \left[\mathbf{T} \mathbf{K} - (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \right]^T \left[\mathbf{T} \mathbf{K} - (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \right] \mathbf{x} \quad (4.19)$$

szorzat minimálását jelenti. Mivel a (4.19) mátrix nem negatív, ezért a (4.18) egyenlet minimális értéket akkor vesz fel, ha

$$\mathbf{T} \mathbf{K} = (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}. \quad (4.20)$$

A (4.20) egyenletből most fejezzük ki a \mathbf{K} állapot-visszacsatolási mátrixot:

$$\mathbf{K}^0 = \mathbf{T}^{-1} (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}. \quad (4.21)$$

A (4.21) egyenlet definiálja az optimális \mathbf{K} visszacsatolási mátrixot. Az optimális vezérlési törvény ily módon a következő lesz:

$$\mathbf{u}^0(t) = -\mathbf{K}^0 \mathbf{x}(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t). \quad (4.22)$$

A \mathbf{P} költségmátrix megállapítására gyakran alkalmazzák az ún. elfajult Riccati algebrai mátrixegyenletet:

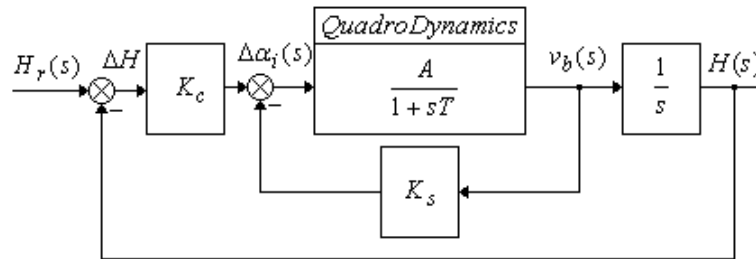
$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0. \quad (4.23)$$

Az eddig elhangzottak alapján megfogalmazhatjuk az LQR optimálási feladat megoldásának lépéseit:

- 1, A (4.23) egyenlet alapján meghatározzák a \mathbf{P} pozitív definit költség (Ljapunov) mátrixot;
- 2, A kapott \mathbf{P} mátrixot behelyettesítik a (4.22) egyenletbe. A \mathbf{K} visszacsatolási mátrix optimális, az optimális vezérlési törvényt a (4.22) egyenlet definiálja.

4.2 Quadroter magasságstabilizáló rendszere szabályozójának előzetes tervezése

A quadroter magasságstabilizáló rendszere az 5. ábrán látható.



5. ábra. A magasságstabilizáló rendszer hatásvázlata.

Az 5. ábra alapján írjuk fel a szabályozási rendszer állapot-egyenletét [10, 11]:

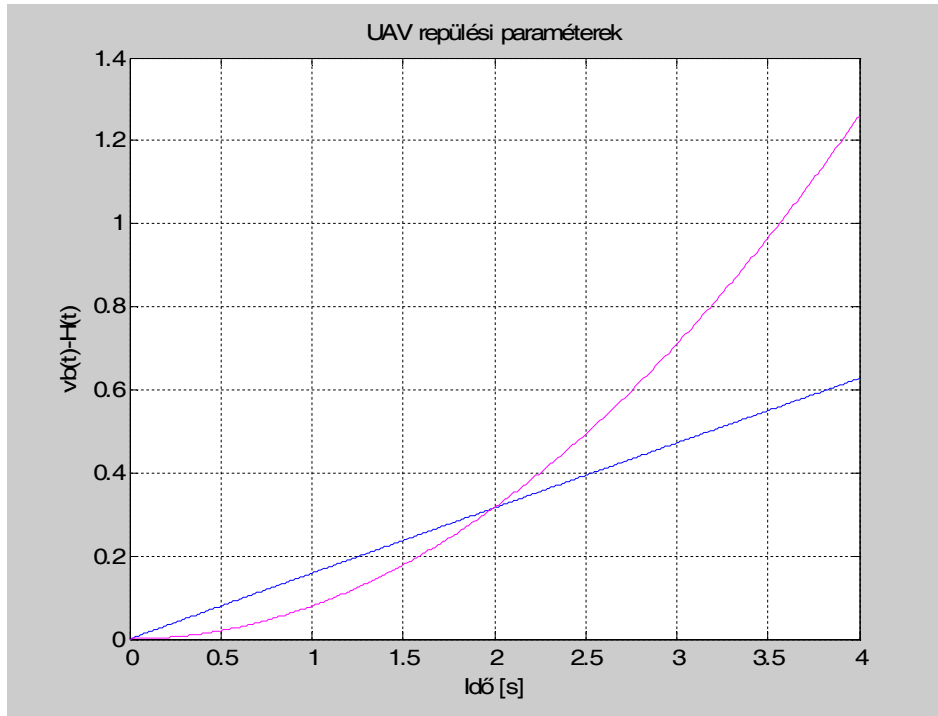
$$v_b(s) = \frac{A}{1+sT} \Delta\alpha_i(s) \rightarrow v_b(t) = -\frac{v_b(t)}{T} + \frac{A}{T} \Delta\alpha_i(t) \quad (4.24)$$

$$H(s) = \frac{1}{s} v_b(s) \rightarrow \dot{H}(t) = v_b(t) \quad (4.25)$$

A (4.24), és a (4.25) egyenletek alapján a rendszer állapotegyenlete a következő mátrixos alakban írható fel:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} v_b(t) \\ H(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_b(t) \\ H(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A/T \\ 0 \end{bmatrix} \Delta\alpha_i(t) \quad (4.26)$$

A nemirányított quadrotor átmeneti függvénye a 6. ábrán látható.



6. ábra. Nemirányított UAV átmeneti függvények
Függőleges repülési sebesség Repülési magasság

A zárt szabályozási rendszer vezérlési törvénye az alábbi egyenlettel adható meg:

$$\mathbf{u}(t) = \Delta\alpha_i(t) = -H(t)K_c - v_b(t)K_s = -\mathbf{K}\mathbf{x}, \quad (4.27)$$

ahol: $\mathbf{x} = [v_b \ H]^T$ - állapot-vektor; $\mathbf{K} = [K_c \ K_s]$ - teljes állapot-visszacatolási mátrix.

Tervezzük meg az optimális állapot-visszacatolási mátrixot az alábbi, un. egységnyi, azonos súlyozás elvén meghatározott súlyozó mátrixok esetén [1, 2, 10, 11]:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; r_1 = 1. \quad (4.28)$$

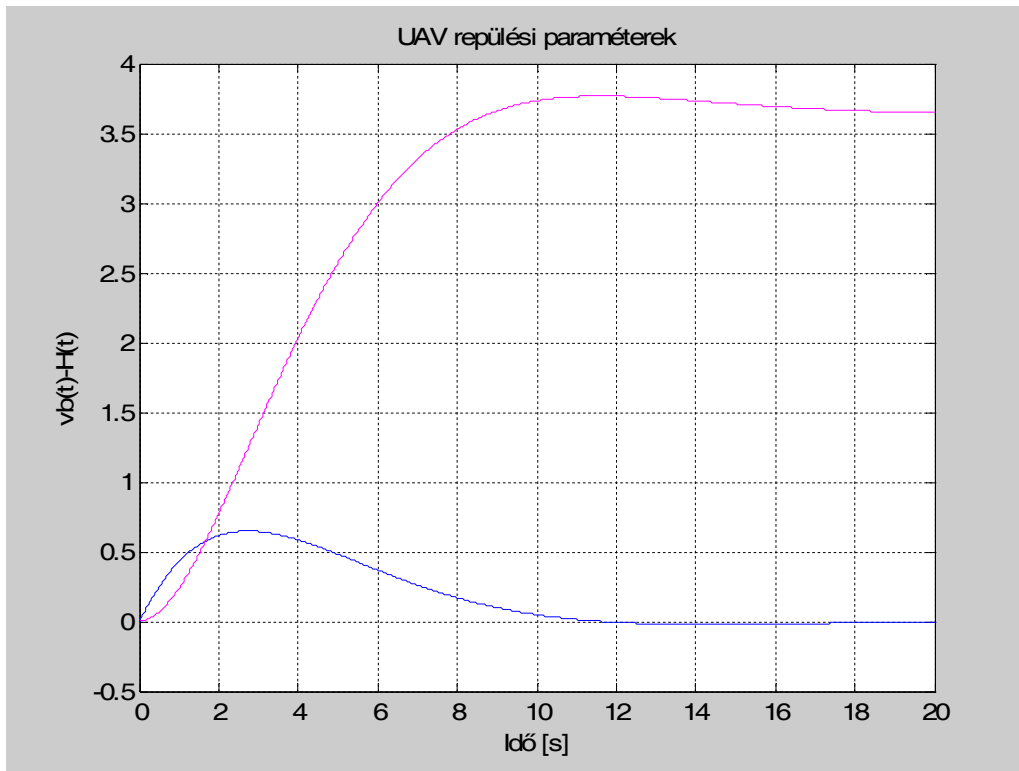
A teljes állapot-visszacatolási mátrix most a következő lesz [10, 11]:

$$\mathbf{K}_1 = [K_c \ K_s] = [3,6449 \ 1], \quad (4.29)$$

A zárt szabályozási rendszer átmeneti függvénye a $H_r(t) = 1(t)$ bemeneti jelre az (5.28) súlyozás esetén a 7. ábrán látható.

A 7. ábrán jól látható, hogy az egységnyi bemeneti jelre adott válasz stacioner értéke $H(\infty) \approx 3,7m$, tehát az ideális alapjel követés nem valósul meg [10, 11]. A zárt szabályozási rendszer minőségi jellemzői nem felelnek meg az előírt értékeknek [12], bár meg kell jegyezni, hogy a hivatkozott katonai szabvány az ember vezette légi járművekre vonatkozik, így annak alkalmazása az UAV-kra túlságosan szigorú minőségi követelménynek tűnik.

Megemlítjük, hogy a pilóta nélküli repülőgépekre a mai napig minőségi követelményrendszer nem áll rendelkezésre.



7. ábra. UAV zárt szabályozási rendszer átmeneti függvényei
Függőleges repülési sebesség Repülési magasság

A zárt szabályozási rendszer minőségi jellemzői az alábbiak lesznek:

Sajátértékek	Csillapítási tényező, ξ	Körfrekvencia, [rad/s]
$-0,293 \pm 0,27i$	0,735	0,399

Hangoljuk a (4.28) súlyozó mátrixokat heurisztikusan. Számos kísérleti beállítás, és próba után, a zárt szabályozási rendszer előírt minőségi jellemzőit teljesítő súlyozó mátrixkombináció a következő lesz [1, 2, 10,11]:

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 0,97 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; r_2 = 0,000005. \quad (4.30)$$

A (4.30) súlyozó mátrixok alapján határozzuk meg a teljes állapot-visszacsatolási mátrixot:

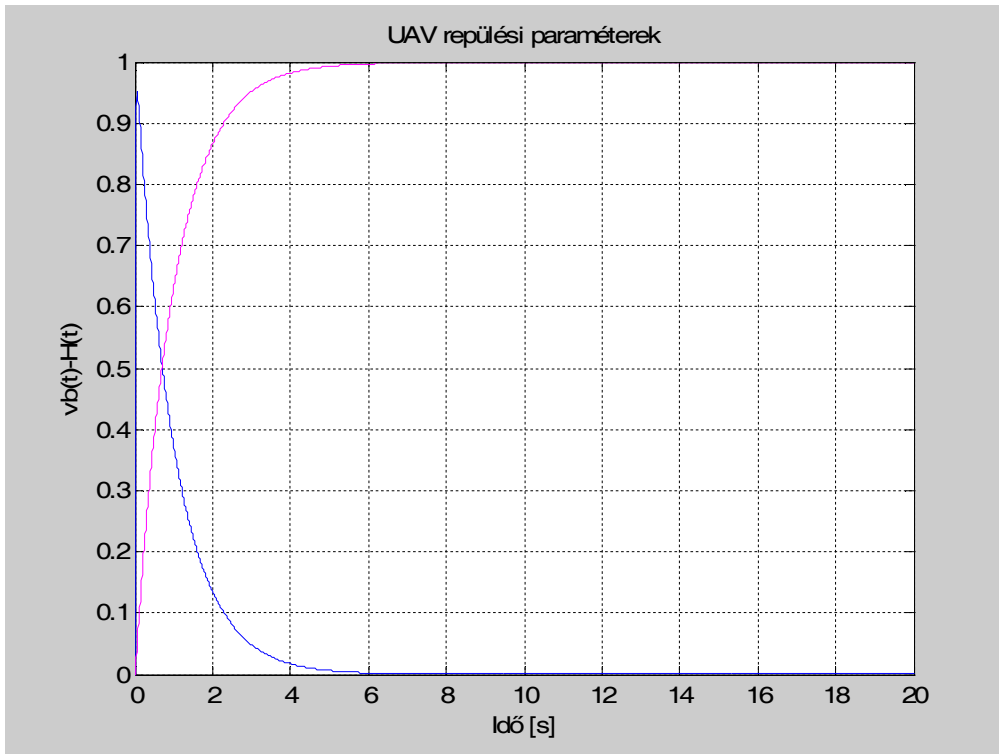
$$\mathbf{K}_2 = [K_c \quad K_s] = [446,7565 \quad 447,2136], \quad (4.31)$$

A zárt szabályozási rendszer átmeneti függvénye a $H_r(t)=1(t)$ bemeneti jelre az (5.30) súlyozó mátrixok esetére a 8. ábrán látható.

A 8. ábrán jól látható, hogy az egységnyi bemeneti jelre adott válasz stacioner értéke $H(\infty)=1m$, tehát megvalósul az ideális alapjel követés. A zárt szabályozási rendszer minőségi jellemzői megfelelnek meg az előírt értékeknek [12].

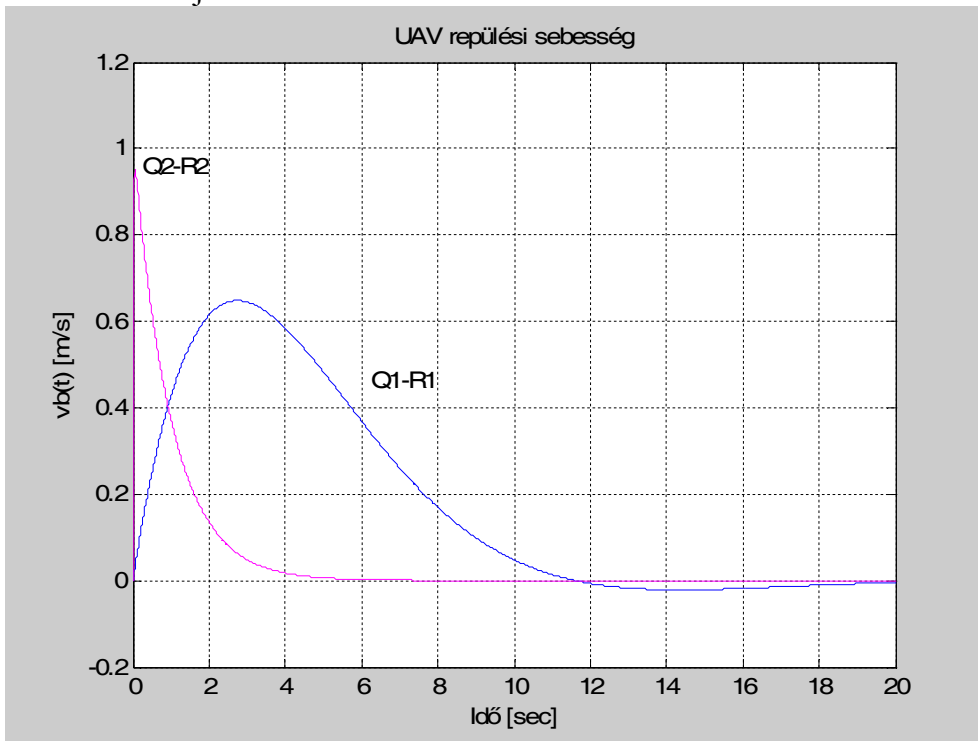
A módosított (hangolt) zárt szabályozási rendszer minőségi jellemzői az alábbiak lesznek:

Sajátértékek	Csillapítási tényező, ξ	Körfrekvencia, [rad/s]
-70	1	70
-1,02	1	1,02

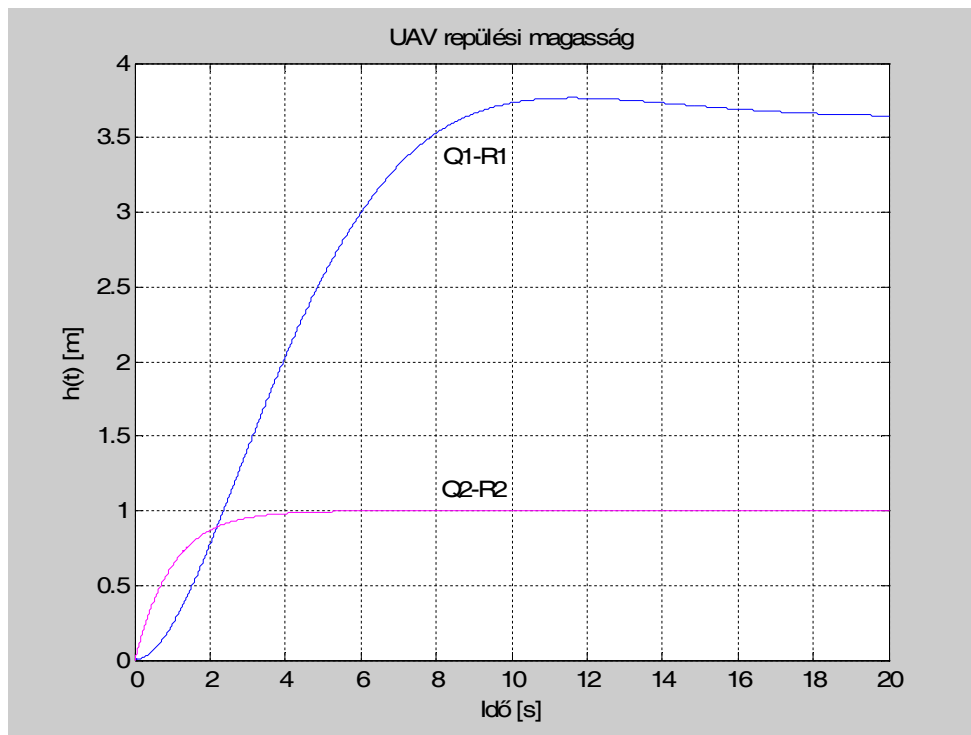


8. ábra. UAV zárt szabályozási rendszer átmeneti függvényei
 Független repülési sebesség Repülési magasság

Hasonlítsuk össze a két súlyozás alapján tervezett rendszer zárt szabályozási rendszer viselkedését. Az két rendszer megfelelő állapotváltozóit a különféle súlyozás alkalmazása esetére a 9. ábrán láthatjuk.



9. ábra. Az UAV zárt magasságstabilizáló rendszerének átmeneti függvényei.
 UAV független repülési sebesség (Q1-R1 Q2-R2)



9. ábra. Az UAV zárt magasságstabilizáló rendszerének átmeneti függvényei.
UAV repülési magasság (Q1-R1 Q2-R2)

A 9. ábrán jól látható, hogy az alapjel követés a $H_r(t) = 1(t)$ bemeneti jelre megvalósul, és a zárt szabályozási rendszer minőségi jellemzői is megfelelnek az előírt értékeknek [1, 2, 10, 11, 12].

5. ÖSSZEGZÉS, KÖVETKEZTETÉSEK

A cikkben a szerző bemutatta a quadrotorok térbeli mozgásának matematikai modelljét, és az egyik, talán leginkább gyakori repülési üzemmóddal, a „függés” manőverrel foglalkozott. E manőverek során fő feladat a megadott repülési magasság tartása, a megfelelő minőségi jellemzők biztosítása mellett.

A repülési manőver optimális szabályozási rendszer segítségével is végrehajtható. Az LQR feladat megoldására a szerző új súlyozást mutatott be, aminek révén olyan szabályozó tervezhető, amely biztosítja a zárt repülésszabályozó rendszer előírt minőségi jellemzőit [12]. Az LQR feladat determinisztikus rendszerekre használható, így a cikkben bemutatott, és megoldott feladat kiterjeszthető sztochasztikus rendszerekre is, így a következő feladat a dinamikus szabályozó tervezése (az LQG feladat megoldása külső, és belső sztochasztikus zajok esetén) lesz. Ha szeretnénk robusztus szabályozási rendszert tervezni, akkor a robusztus repülésszabályozó rendszer tervezését a H_2 -, vagy a H_∞ - módszerek segítségével végezzük el.

OPUS CITATUM

- [1] McLEAN, D., Automatic Flight Control Systems, Prentice-Hall International, New York-London-Toronto-Sydney-Tokyo-Singapore, 1990.
- [2] NELSON, L. C., Flight Stability and Control, McGraw-Hill Companies, Inc., Boston, Massachusetts, Burr Ridge, 1998.

- [3] SZABOLCSI, R., Egy felmérés margójára – néhány gondolat a pilóta nélküli repülőgépek polgári és katonai alkalmazásáról, Szolnoki Tudományos Közlemények XII., HU ISSN 2060-3002, 2008.
<http://www.szolnok.mtesz.hu/sztk/kulonszamok/2008/cikkek/szabolcsi-robert.pdf>
- [4] SZABOLCSI, R., Conceptual Design of Unmanned Aerial Vehicle Systems for Non-Military Applications, Proceedings of the 11th Mini Conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies VSDIA 2008, ISBN 978-963-313-011-7, pp (637-644), Budapest University of Technology and Economics, 10-12 November 2008, Budapest, Hungary.
- [5] SZABOLCSI, R., Some Thoughts on the Conceptual Design of the Unmanned Aerial Systems Used for Military Applications, XVI. Magyar Repüléstudományi Napok tudományos konferencia kiadványa, ISBN 978-963-420-857-0, BME, 2008. november 13-14, Budapest.
- [6] SZABOLCSI, R., Conceptual Design of the Unmanned Aerial Vehicle Systems Used for Military Applications, Scientific Bulletin of “Henri Coanda” Air Force Academy, No. 1/2009., ISSN 2067-0850, pp(61-68), Brasov, Romania.
- [7] SZABOLCSI, R., Identification of the UAV Mathematical Models, CD-ROM Proceedings of the VIth International Conference „New Challenges in the Field of Military Sciences, ISBN 978-963-87706-4-6, 18-19 November 2009, Budapest, Hungary.
- [8] SZABOLCSI, R., Conceptual Design of the Unmanned Aerial Vehicle Systems for the Firefighter Applications, CD-ROM Proceedings of the 12th International Conference „AFASES 2010”, ISBN 978-973-8415-76-8, p4, 27-29 May 2010, Brasov, Romania.
- [9] SZABOLCSI, R., Conceptual Design of the Unmanned Aerial Vehicle Systems for the Police Applications, CD-ROM Proceedings of the 12th International Conference „AFASES 2010”, ISBN 978-973-8415-76-8, p4, 27-29 May 2010, Brasov, Romania.
- [10] Prof. Dr. Szabolcsi Róbert: Katonai robotok számítógéppel támogatott tervezése – QUADRO LAB szakmai műhely létesítése az új, nemzeti közszolgálati egyetemen, „Műszaki Tudomány az Észak-Kelet Magyarországi Régióban, 2011” tudományos konferencia kiadványa, 2011. május 18., ISBN 978-963-7064-25-8, pp(11-27), DAB Műszaki Szakbizottsága, Debrecen, 2011. — Plenáris előadás.
http://store1.digitalcity.eu.com/store/clients/release/mtekmr_2011.pdf.
- [11] Prof. Dr. Szabolcsi Róbert: Katonai robotok számítógéppel támogatott tervezése – QUADRO LAB szakmai műhely létesítése az új, nemzeti közszolgálati egyetemen, Multidiszciplináris Tudományok, HU ISSN 2062-9737, 1. kötet, 1. szám (2011), pp(31-42), Miskolci Egyetemi Kiadó, 2011.
- [12] *MIL-STD 1797 A*, Notice 3, Flying Qualities of Piloted Aircraft, Department of Defense, Interface Standard, 2004.