HADMÉRNÖK

XI. Évfolyam 3. szám - 2016. szeptember

Gyarmati József
gyarmati.jozsef@uni-nke.hu

TÖBBSZEMPONTÚ CSOPORTOS DÖNTÉSI PROBLÉMA MEGOLDÁSA TOPSIS MÓDSZERREL

Absztrakt

A cikkben a többszempontú döntési probléma megoldására kifejlesztett TOPSIS eljárás kerül bemutatásra. Az eljárás alapváltozata mellett ismertetem a csoportos döntési probléma megoldását, valamint a TOPSIS fuzzy változatát is. A módszer elsajátítását példa segíti elő.

In this paper I will show how the TOPSIS method works. The TOPSIS feasible to solve group decision problem that is also shown. The uncertainty of decision making can make great difficulties and inaccurate decision. The fuzzy approach of TOPSIS is exist which can help to handle this problem.

***Kulcsszavak**:Többszempontú döntéshozatal, TOPSIS, FTOPSIS ~ Multi-Criteria Decision Making, TOPSIS, FTOPSIS*

BEVEZETÉS

A többszempontú döntési problémák megoldására számos eljárást fejlesztettek ki az elmúlt évtizedekben. A fontosabb módszereket foglalja össze például az [1], katonai-műszaki alkalmazásra mutat példát az [1], [2], [3], [4], [5]. Az egyes döntési módszerek az alkalmazott alapelvek szerint oly mértékben eltérő tulajdonságokkal rendelkeznek, hogy szükségessé vált a rendszerezésük. A legtöbb szakirodalom két főcsoportot definiál, ezek:

- amerikai iskola v. pontozásos eljárások (AHP, MAUT);
- európai iskola v. outranking eljárások (ELECTRE, PROMETHEE).

Egyre több olyan módszer létezik viszont, amelyek széles körben elterjedtek, jól alkalmazhatók viszont nem sorolhatók be a fenti két csoport egyikébe sem. Ilyen eljárás a TOPSIS [6] (Technique of Order Preference Similarity to the Ideal Solution), amely bemutatására készült ez a cikk.

A módszer képez egy un. pozitív ideális megoldást (PIS), és egy un. negatív ideális megoldást (NIS). Az egyes alternatívákat a PIS és az NIS által meghatározott pontoktól számított távolságuk alapján rangsorolja. Mivel a rangsoroláskor a legrosszabbhoz viszonyított elhelyezkedés is figyelembe van véve ezért, ezt a módszert kockázatkerülő eljárásként tartják számon.

A TOPSIS alkalmas csoportos döntési probléma megoldására, valamint a fuzzy logika alapján képes figyelembe venni a döntéshozói bizonytalanságot is.

A cikk bemutatja a TOPSIS alap- és fuzzy változatát is. A módszer elsajátítását számítási példa segíti.

BEVEZETÉS A FUZZY LOGIKA ALAPJAIBA

A halmazelmélet segítségével egyértelműen eldönthető hogy egy előre definiált halmaznak egy kiválasztott elem a része vagy sem. A valóságban viszont sok olyan eset létezik, amelyet halmazelmélet segítségével nem lehet modellezni. Ezt a fuzzy logika magyarázatában nagyon gyakran alkalmazott példa segítségével lehet jól illusztrálni.

Kit nevezhetünk kopasznak? Azt, akinek egy szál haja sincs, vagy létezik valamilyen átmenet a dús hajjal rendelkező és a teljesen kopasz között. Vagyis a pontosabb modellezhetőség miatt egy elem nem minden esetben rendelhető hozzá egyértelműen és teljes mértékben egy halmazhoz, létezhetnek olyan esetek, amikor a vizsgált elem csak meghatározott mértékben része a halmaznak.

A klasszikus eset karakterisztikus függvénye:

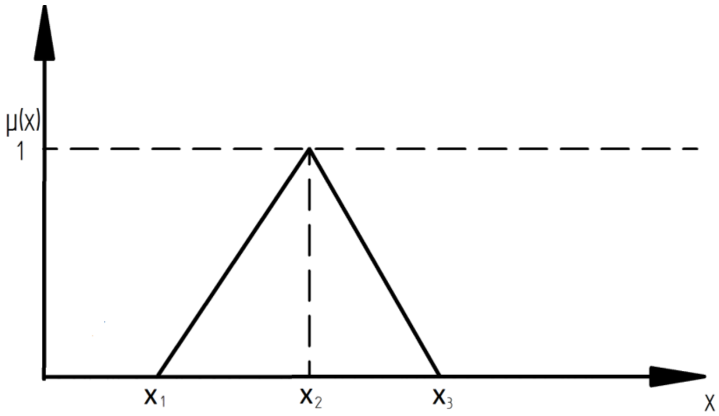
$$g(x) = \begin{cases} 1 \;\; ha \;\; x \in H \\ \\ 0 \;\; ha \;\; x \notin H \end{cases} \qquad [1]$$

ahol H a g(x) értelmezési tartományának egy részhalmaza, amelyre vonatkozó tagságot vizsgálunk. A klasszikus halmazelmélet szerint a H halmazhoz való tartozást az [1] karakterisztikus függvény a következőképpen egyértelműen megadja:

$$x \in H \;\Leftrightarrow g(x) = 1\,, \qquad [2]$$

vagyis, ha a függvényérték 1, akkor a vizsgált elem részhalmaza H-nak. A fuzzy logika a H halmazhoz való tartozást a következő karakterisztikus függvény segítségével vizsgálja:

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x-x_1}{x_2-x_1} & ha \;\; x_1 \leq x < x_2 \\ \frac{x_3-x}{x_3-x_2} & ha \;\; x_2 \leq x < x_3 \\ 0 & ha \qquad x < x_1 \\ 0 & ha \qquad x \geq x_3 \end{cases} \qquad [3]$$



1. ábra Háromszög alakú tagsági függvény

A [3] függvényt grafikusan mutatja be az 1. ábra, amit tagsági függvénynek nevezünk. A fuzzy elméletben többféle tagsági függvény létezik itt csak az 1. ábra és a [3] szerinti un. háromszög alakú tagsági függvény kerül bemutatásra, amely leírható az un. fuzzy szám segítségével:

$$\tilde{x} = (x_1; x_2; x_3). \qquad [4]$$

DEFINÍCIÓ. A legyen $\tilde{a} = (a_1; a_2; a_3)$ és $\tilde{b} = (b_1; b_2; b_3)$ fuzzy szám.
A két fuzzy szám összege:

$$\tilde{a}(+)\tilde{b} = \left(a_1 + b_1; a_2 + b_{2;} a_3 + b_3\right) \qquad [5]$$

A két fuzzy szám szorzata:

$$\tilde{a}(\cdot)\tilde{b} = \left(a_1 b_1; a_2 b_{2;} a_3 b_3\right) \qquad [6]$$

A két fuzzy szám közötti távolság:

$$d\left(\tilde{a}, \tilde{b}\right) = \sqrt{\frac{1}{3}[(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2]}. \qquad [7]$$

A TOPSIS MÓDSZER

A TOPSIS, ahogy az a bevezetésben elhangzott definiál egy lehetséges legjobb és egy lehetséges legrosszabb megoldást, majd az alternatívákat az ezekhez viszonyított elhelyezkedésük alapján rangsorolja. Az elvet a 2. ábra mutatja. A megoldás öt lépésből áll, melyek az [7, p. 217] szerint kerülnek bemutatásra. Tartalmazza az X döntési mátrix m számú alternatíva értékelését n számú szempont szerint:

$$\mathbf{X} = [x_{ij}]_{n \times m} \;\; i = 1 \ldots n; \; j = 1 \ldots m,$$

ahol x_{ij} a j-edik alternatíva i-edik szempont szerinti értékét jelenti.

1. Normálás a [8, p. 48] szerint.

Disztributív módszer

Maximálandó értékekre: $r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2}}$ [8]

Minimálandó értékekre: $r_{ij} = 1 - \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2}}$ [9]

Lineáris módszer

Maximálandó értékekre: $r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\max_j x_{ij}}$ [10]

Minimálandó értékekre: $r_{ij} = \frac{\min_j x_{ij}}{x_{ij}}$ [11]

Lineáris összegző módszer

Maximálandó értékekre: $r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} x_{ij}}$ [12]

Minimálandó értékekre: $r_{ij} = 1 - \frac{x_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} x_{ij}}$ [13]

Lineáris minimum és maximum értékeken alapuló módszer

Maximálandó értékekre: $r_{ij} = \frac{x_{ij} - \min_j x_{ij}}{\max_j x_{ij} - \min_j x_{ij}}$ [14]

Minimálandó értékekre: $r_{ij} = \frac{\max_j x_{ij} - x_{ij}}{\max_j x_{ij} - \min_j x_{ij}}$ [15]

Az $\mathbf{R} = [r_{ij}]_{n\times m}$ a normált döntési mátrix, és $i = 1...n; j = 1...m$.

2. Súlyozás

Az egyes szempontok fontosságát az ωi súlyszám segítségével kell figyelembe venni. A súlyszámmal képezzük a súlyozott döntési mátrixot:

$$\mathbf{V} = [v_{\mathrm{ij}}]_{n\times m}, \quad [16]$$

ahol: $v_{ij} = \omega_i \cdot r_{ij}$ és $i = 1...n; j = 1...m$.

3. Pozitív és negatív ideális megoldás meghatározása

$$\mathrm{A}^+ = (v_1^+, v_2^+, ..., v_n^+), \quad [17]$$

ahol $v_i^+ = \max_j\{v_{ij}\}$ $i = 1...n; j = 1...m$.

$$\mathrm{A}^- = (v_1^-, v_2^-, ..., v_n^-), \quad [18]$$

ahol $v_i^- = \min_j\{v_{ij}\}$ $i = 1...n; j = 1...m$.

4. Távolságok meghatározása

A j-edik alternatíva távolsága a pozitív ideális megoldástól (PIS):

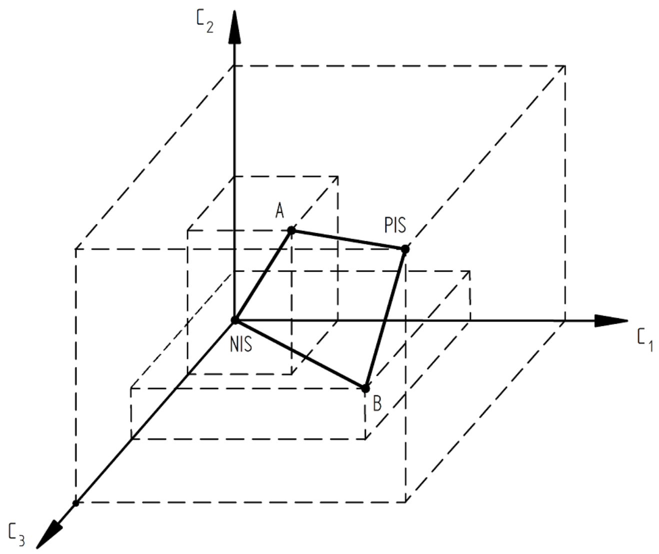
$$d_j^+ = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(v_i^+ - v_{ij}\right)^2}. \qquad [19]$$

A *j*-edik alternatíva távolsága a negatív ideális megoldástól (NIS):

$$d_j^- = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(v_i^- - v_{ij}\right)^2}. \qquad [20]$$

5. Relatív távolságok meghatározása

$$C_j = \frac{d_j^-}{d_j^+ - d_j^-} \qquad [21]$$



2. ábra A rangsor számításának elve

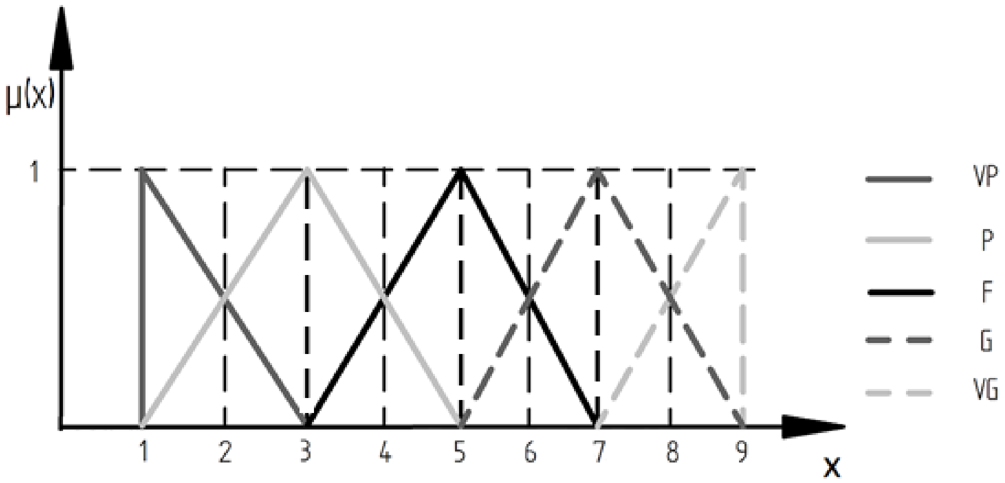
C1, C2, C3 szempontok; A, B alternatívák
PIS, NIS pozitív és negatív ideális megoldás

FUZZY TOPSIS

Legyen K számú döntéshozó, akik az 1. táblázat szerinti verbális kategóriák alapján értékelik az alternatívákat és a szempontokat. Az 1. táblázathoz tartozó tagsági függvényt mutatja a 3. ábra. A megoldás hat lépésből áll.

1. táblázat. Verbális értékeléshez tartotó fuzzy számhármasok

Fuzzy számhármas		Verbális értékelés
(1,1,3)	VP v. VL	nagyon rossz v. nagyon alacsony
(1,3,5)	P v. L	rossz v. alacsony
(3,5,7)	F v. M	elfogadható v. közepes
(5,7,9)	G v. H	jó v. magas
(7,9,9)	VG v. VH	nagyon jó v. nagyon magas



3. ábra Az értékelés tagsági függvénye

1. A szakértők becsléseinek aggregálása.

Az irodalom két módszert is ismertet. A [9] szerinti összegzés:

$$\tilde{x}_{ij} = \frac{1}{K}\left(\tilde{x}_{ij}^{1}(+)\tilde{x}_{ij}^{2}(+),\dots,(+)\,\tilde{x}_{ij}^{K}\right) \qquad [22]$$

$$\tilde{\omega}_{i} = \frac{1}{K}\left(\tilde{\omega}_{i}^{1}(+)\tilde{\omega}_{i}^{2}(+),\dots,(+)\,\tilde{\omega}_{i}^{K}\right). \qquad [23]$$

ahol az $\tilde{x}_{ij}^{k} = \left(a_{ij}^{k}, b_{ij}^{k}, c_{ij}^{k}\right)$ és a $\tilde{\omega}_{i}^{k} = \left(\omega_{i1}^{k}, \omega_{i2}^{k}, \omega_{i3}^{k}\right)$ a k-adik szakértő értékeléséhez tartozó fuzzy szám, és K a szakértők száma.

A [10] szerint:

$$\tilde{x}_{ij} = \left(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}\right), \tag{24}$$

$$\widetilde{\omega}_i = \left(\omega_{i1}, \omega_{i2}, \omega_{i3}\right), \tag{25}$$

ahol $a_{ij} = \min_k\left\{a_{ij}^k\right\}$; $b_{ij} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} b_{ij}^k$; $c_{ij} = \max_k\left\{c_{ij}^k\right\}$,

$\omega_{i1} = \min_k\left\{\omega_{i1}^k\right\}$; $\omega_{i2} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} \omega_{i2}^k$; $\omega_{i3} = \max_k\left\{\omega_{i3}^k\right\}$.

2. Normálás

Maximálandó értékekre

$$\tilde{r}_{ij} = \left(\frac{a_{ij}}{c_i^+}; \frac{b_{ij}}{c_i^+}; \frac{c_{ij}}{c_i^+}\right) \tag{26}$$

$$c_i^+ = \max_j c_{ij}$$

Minimálandó értékekre

$$\tilde{r}_{ij} = \left(\frac{a_i^-}{c_{ij}}; \frac{a_i^-}{b_{ij}}; \frac{a_i^-}{a_{ij}}\right) \tag{27}$$

$$a_i^- = \min_j a_{ij}$$

3. Súlyozás

A súlyozott normált döntési mátrix

$$\widetilde{\boldsymbol{V}} = \left[\tilde{v}_{ij}\right]_{n\times m} \tag{28}$$

ahol: $\tilde{v}_{ij} = \tilde{r}_{ij}(\cdot)\widetilde{\omega}_i$, és $\tilde{v}_{ij} = \left(v_{ij1}, v_{ij2}, v_{ij3}\right)$.

4. Pozitív és negatív ideális megoldás meghatározása

$$A^+ = (\tilde{v}_1^+, \tilde{v}_2^+, \ldots, \tilde{v}_n^+) \tag{29}$$

$$\tilde{v}_i^+ = \left(\max_j\left(v_{ij3}\right), \max_j\left(v_{ij3}\right), \max_j\left(v_{ij3}\right)\right)$$

$$A^- = (\tilde{v}_1^-, \tilde{v}_2^-, \ldots, \tilde{v}_n^-) \tag{30}$$

$$\tilde{v}_i^- = \left(\min_j\left(v_{ij1}\right), \min_j\left(v_{ij1}\right), \min_j\left(v_{ij1}\right)\right)$$

5. Távolságok meghatározása

$$d_j^+ = \sum_{i=1}^{m} d_v\left(\tilde{v}_{ij} v_i^+\right), \qquad [31]$$

$$d_j^- = \sum_{i=1}^{m} d_v\left(\tilde{v}_{ij} v_i^-\right), \qquad [32]$$

ahol két fuzzy számhármas közötti távolság a [7] egyenlet szerint számítható.

6. Relatív távolságok meghatározása

$$C_j = \frac{d_j^-}{d_j^+ - d_j^-} \qquad [33]$$

Példa

DM_1 és DM_2 döntéshozó A_1 és A_2 alternatívát C_1, C_2, C_3, szempont alapján ítél meg az 1. táblázat verbális besorolása alapján. Az ítéleteiket a 2. és a 3. táblázat tartalmazza. A döntéshozók értékelései a [23] függvény szerint vannak összegezve.

2. táblázat. A döntéshozók alternatívákra vonatkozó ítéletei szempontonként

	A1		A2	
	DM1	DM2	DM1	DM2
C1	F(3,5,7)	F(3,5,7)	G(5,7,9)	G(5,7,9)
C2	VG(7,9,9)	G(5,7,9)	G(5,7,9)	F(3,5,7)
C3	P(1,3,5)	F(3,5,7)	P(1,3,5)	P(1,3,5)

3. táblázat. A döntéshozók szempontokra vonatkozó ítéleteik

DM1	**H(5,7,9)**	**VH(7,9,9)**	**M(3,5,7)**
DM2	M(3,5,7)	H(5,7,9)	L(1,3,5)

4. táblázat. Agregált fuzzy döntési mátrix

	A1			A2		
C1	3	5	7	5	7	9
C2	5	8	9	3	6	9
C3	1	4	7	1	3	5

5. táblázat. Súlyozott normált fuzzy döntési mátrix

	A1			A2			FPIS			FNIS		
C1	1	3,33	7	1,67	4,67	9	9	9	9	1	1	1
C2	2,78	7,11	9	1,67	5,33	9	9	9	9	1,67	1,67	1,67
C3	0,11	1,78	5,44	0,11	1,33	3,89	5,44	5,44	5,44	0,11	0,11	0,11

6. táblázat. Az alternatívák távolsága pozitív és a negatív ideális megoldástól

	FPIS↔A1	FPIS↔A2	FNIS↔A1	FNIS↔A2
C1	5,78	4,92	3,72	5,1
C2	3,75	4,73	5,31	4,73
C3	3,74	3,99	3,23	2,29

ÖSSZEGZÉS

A cikkben bemutatásra került egy kevésbé ismert többszempontú döntési modell a TOPSIS. Az alapmodell bemutatásán felül ismertettem a csoportos döntési probléma megoldását, valamint a fuzzy logika segítségével ismertetésre került a TOPSIS olyan változata, amely figyelembe veszi a döntéshozói bizonytalanságot. A módszerek elsajátításának ellenőrzését egy példa segíti.

Felhasznált irodalom

[1] A. Ishizaka and P. Nemery, Multy-Criteria Decision Analysis Methods and Softwar United Kingdom: Wiley, 2013.

[2] I. Bimbó, „Mesterlövész fegyverek összehasonlítása AHP döntési modell segítségével," Katonai Logisztika, XXI, 2, pp. 102-115, 2013.

[3] R. Fekete, „Kézi lőfegyver kiválasztása a Honvéd Koronaőrség részére," Katonai Logisztika, 20, 1. pp. 102-114, 2012.

[4] L. Kavas, „A helikopter típusváltással kapcsolatos gondolatok és a kiválasztást megalapozó elvárások," Repüléstudományi közlemények, 26, 1, pp. 93-98, 2013.

[5] L. Kavas, „A súlyszámok problematikája komplex rendszerek értékelése során," Repüléstudományi közlemények,19, Különszám, pp. 1-7, 2007.

[6] I. Szakácsi, „Optimális haditechnikai eszközök kiválasztása matematika modell segítségével," Hadtudomány, 23, 2. Elektronikus, pp. 22-40, 2013.

[7] C. L. Hwang és K. Yoon, Multiple Attribute Decision Making Methods and Application, New York: Springer-Verlag, 1981.

[8] A. Jahan and K. L. Edwards, Multi-criteria Decision Analysis for Supporting the Selection of Engineering Materials in Product Design, London: Elsevier, 2013.

[9] S. Saghafian and R. S. Hejazi, "Multi-criteria Group Decision Making Using A Modified Fuzzy TOPSIS Procedure," IEEE p. 6, 2005.

[10] S. Balwinder és V. T. Prabhakar, „A Simplified Description of Fuzzy TOPSIS," Dept. of Computer Science and Engineering, IIT Kanpur,UP 208016 India, May 2012.