

ÓVÁRI Gyula - PAPP István - SZILVÁSSY László
pappi@uni-nke.hu - ovari.gyula@uni-nke.hu - szilvassy.laszlo@uni-nke.hu

RAKÉTA MOZGÁSEGYENLETEK

Absztrakt

Hosszú út vezetett a korszerű repülőfedélzeti irányítható rakéták létrehozásáig. Az ókori tűzijátékok eszközéből az évszázadok során hatásos és pusztító fegyver fejlődött ki. A rakétákat harci fegyverként a IX. században a feketelőpor feltalálása után kezdték el használni Kínában. Ezután fokozatosan elterjedt a keleti országokban a XIII. századig. Folyamatos fejlődésének köszönhetően, a rakétatechnika elterjedt a világ minden táján, Európában nagy lökést adva az indiai függetlenségi mozgalmi harcban az angol gyarmatosítók ellen 1799-ben. Az 1800-as évek elején Európában is megkezdődött a harci rakéták korszerűsítése és a hadseregek fegyverzeteiben meg is jelentek [1].

Long road to state of the art flight deck guided missiles establishment. The ancient instrument of fireworks over the centuries, powerful and destructive weapons developed. The samples were missile combat weapon IX. century began to be used in China after the invention of black powder. Then gradually it spreads to the east of the country XIII. century. Due to the continuous development of rocket technology it spreads all over the world, giving a big boost for the Indian independence movement in the fight against the British colonialists in 1799. In the early 1800s, Europe has also begun to modernize missiles, fighter of the armies and arms of even published.

Kulcsszavak: rakéta, aerodinamika, mozgásegyenlet ~ missile, aerodynamics, equation of motion

BEVEZETÉS

A II. világháború ideje az amikor megjelentek az első irányítható rakéták. Ezekkel az eszközökkel a náci Németország végzett kísérleteket 1944–45-ben. Először a W-1 repülő bomba, amelyet inerciális irányító rendszerrel szereltek fel, majd a W-2 ballisztikus rakéták ezreit zúdították Európai városok ezreire (először Londonra). Ezek után légvédelmi, valamint irányítható páncéltörő rakétákkal hajtottak végre sikeres kísérleteket, melyek vezetékes vagy rádió parancsirányítással rendelkeztek. Előbbi tömeges alkalmazására a háború befejezése miatt nem került sor [1].

Az 1. táblázatban láthatjuk, hogy a cél kiválasztásának módszere szerinti három önirányítási módszert különböztetünk meg.

1. táblázat. Légiharc rakéták irányítási módozatai

Félaktív önirányítás	Aktív önirányítás	Passzív önirányítás
Falcon	Meteor	Sidewinder
AIM-7 Sparrow	AIM-9X Sidewinder	Mica
Skyflash Aspide	AMRAAM AIM-120 MIM-104 Patriot	Magic 2 Shafrir
Phoenix (+ Aktív)	AGM-84G Harpoon	SAAB 327
AA-1 Trough AA-7		ASRAAM (British Aerospace)
		Super R530
		R-73 (AA-11 ARCHER)
		Aerospatiale (AS-30L) - Lézer irányítású

RAKÉTA MOZGÁSEGYLETEK FELÍRÁSA

Egy tömegpontról feltételezhető a rakéta repülési dinamikája, amely magában foglalja az aerodinamikai, a gravitációs, és a rakéta tolóerőket, időben változó tömeg esetén. Egyszerűsített formában, az adott modellnél szükség lesz a következő bemeneti paraméterekre, a rakéta mozgásegyleteinek leírásához¹ [2].

1. Kezdeti vákuum tolóerő T_0
2. Kezdeti tömeg W_0
3. Végző tömeg W_f
4. Égési idő t_b
5. Fúvóka kimeneti területe A_e
6. Aerodinamikai referencia terület A
7. Siklási idő, gyújtás előtt és utánégetés után
8. Legnagyobb megengedett normál gyorsulású terhelés a_{Nmax} .
9. Maximális állásszög α_{max} . [3]

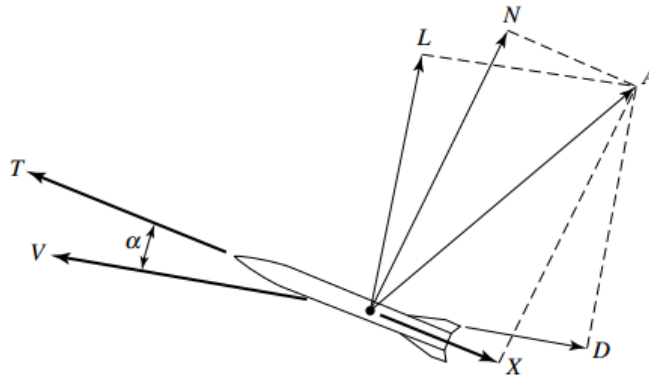
Az 1. ábra mutatja az aerodinamikai és a tolóerő gyorsulási vektorokat, amelyeket ennél a modellnél alkalmaztunk.

¹ The Fundamentals of Aircraft Combat Survivability Analysis and Design, R.E. Ball, AIAA Education Series, copyright© 1985.

A rakéta mozgásegyenletei a következők:

$$\frac{dr}{dt} = v \quad (1a)$$

$$\frac{dv}{dt} = a = a_v 1_v + a_L 1_L + g \quad (1b)$$



1. ábra. Az aerodinamikai és a tolóerő gyorsulási vektorok meghatározása²

V = sebesség;
 T = tolóerővektor;
 L = felhajtóerő gyorsulás vektor = $a_L 1_L$;
 N = normál gyorsulási vektor;
 A = teljes aerodinamikai gyorsulási vektor;
 D = ellenállási erő gyorsulási vektor = $-a_v 1_v$;
 X = tengelyirányú gyorsulási vektor;
 α = állásszög.

A fenti egyenletekben, r , v , és a jelentése a rakéta helyzet (pozíció), sebesség, és gyorsulás vektorok, illetve; 1_v és 1_L egységvektorok a sebesség és a felhajtóerő irányban; a_v és a_L a tolóerő- és az aerodinamikai gyorsulás megfelelő összetevői; és g a nehézségi gyorsulás. A gravitációs kifejezésről azt feltételezzük, hogy konstans. A gyorsulás szempontjából a_v és a_L a következő:

$$a_v = (1/m)[(T - C_x QA) \cos \alpha - C_N QA \sin \alpha], \quad (2a)$$

$$a_L = (1/m)[(T - C_x QA) \sin \alpha + C_N QA \cos \alpha], \quad (2b)$$

ahol:

T = szállított tolóerő;
 m = a rakéta pillanatnyi tömege;
 Q = dinamikus nyomás = $\frac{\rho}{2} v^2$;
 ρ = a légkör sűrűsége;
 C_x = tengelyirányú aerodinamikai erő együttható;
 C_N = normál aerodinamikai erő együttható.

A tervezők számára, tolóerő profil szempontjából két alternatív modell áll rendelkezésre. Az első esetben, állandó vákuumú tolóerőt feltételezünk az égési fokozat ideje alatt [].

² Készítette: a szerző. A következő forrás alapján: http://cdn.preterhuman.net/texts/terrorism_and_pyrotechnics/rocketry/Missiles_and_Warheads/Missile%20Guidance%20&%20Control%20Systems.pdf (176. oldalon)

$$T_{vac} = T_0 \quad (3a)$$

Míg a második modell csökkenő vákuum tolóerő alakot feltételez, így állandó axiális gyorsítást eredményez, és a következőt adja

$$T_{vac} = T_0 [W_f/W_0]^{(t-t_1)/t_b} \quad (3b)$$

ahol t_1 a pillanatnyi szakasz (fokozat) gyújtási ideje. A szállított tolóerő ezután nyeri el a vákuum tolóerő a kifejezést

$$T = T_{vac} - pA_e \quad (3c)$$

Ahol:

p = környezeti nyomás (a rakéta magasságának megfelelően) = $\rho g c^2/\gamma$ [N/m²];

c = helyi hangsebesség [m/s];

γ = gáz fajhő aránya [1,401];

g = gravitációs állandó [m/s²] [3][4].

A rakéta siklási időszaka alatt, $T = 0$. Ne feledjük, hogy a rakéta tolóereje rakétahajtoművek, torlósugaras motorok, vagy mindkettő együttes használatából származik. A működésükre, szilárd vagy folyékony hajtóanyagot alkalmaznak. Tömeg és tehetetlenségi jellemzőik általános meghatározása az indítási és a kiegészi feltételekben kerül meghatározásra, és azonos a tengerszint-impulzussal. A rakéta tömegét m , egy vagy két egyenletből számítjuk, attól függően, hogy a tolóerő melyik formája van használatban. Az állandó-tolóerő modell esetében, a tömeg lineárisan csökken az idő függvényében, és a következőt eredményezi³

$$m = (1/g)\{W_0 - (W_0 - W_f)[(t - t_1)/t_b]\} \quad (4a)$$

A változó tolóerő modell esetében pedig:

$$m = (W_0/g)[W_f/W_0]^{(t-t_1)/t_b} \quad (4b)$$

A rakéta siklási időszaka alatt, m állandó marad a W_0/g vagy W_f/g gyújtás előtti, vagy gyújtás utáni szakaszában, ill. az aerodinamikai együtthatókat C_x és C_N általában M és α segítségével fejezzük ki, ahol a Mach-számot (M) a rakéta sebességéből nyerjük, a következő összefüggés alapján: $M = |\mathbf{v}|/c$. Alternatív módon, funkcionális kifejezéseket kell alkalmazni. A teljes tömeg úgy is kifejezhető, mint

$$m(t) = m_L + C_m \int_0^t T_{SL}(t) dt, \quad (4c)$$

Ahol:

m_L = a rakéta indítási tömege;

m_{B0} = a rakéta tömege a hajtomű utánégetésekor;

$T_{SL}(t)$ = a tengerszintre számított hajtomű tolóerő az idő függvényében,

Valamint:

$$C = (m_{B0} - m_L) / \int_0^t T_{SL}(t) dt \quad (5)$$

³ George M. Siouris - Missile Guidance and Control Systems, ISBN 978-1-4419-1835-2 Springer, USA

A C_x kifejezés, egy egyszerűsített elméleti modell, a tengelyirányú erő együttható kifejezésére:

$$C_x = \begin{cases} 2 \sin^2 \theta_c + C_{x2} \alpha^2 & M \leq 0,5 \\ 2 \sin^2 \theta_c \{1,0 + [((k_1 + k_2 \sin \theta_c)/(k_3 + k_4 \sin \theta_c)) - 1,0] \\ + (k_{5K}/2 \sin^2 \theta_c)(M - 0,5)\} + C_{x2} \alpha^2 & 0,5 \leq M \leq 0,5 \\ 2 \sin^2 \theta_c [(k_6 \sqrt{M^2 - 1} \sin \theta_c)/(k_7 \sqrt{M^2 - 1} \sin \theta_c)] \\ + \frac{\kappa}{M^2} + C_{x2} \alpha^2 & M \geq 1,5, \end{cases} \quad (6)$$

Ahol k_1, \dots, k_7 a rakéta tervezési értékeit képviselik, valamint $\kappa = 0$, a hajtóművel történő repülés alatt, és $\kappa = 1$, a siklási idő alatt. A C_N kifejezhető az α négyzetes változatával, a következők szerint:

$$C_N = C_{N1} \alpha + C_{N2} \alpha^2 \quad (7)$$

Az α állásszögnek a legkisebb értékét kell venni a következő három mennyiségben:

1. Irányított állásszög α_c ;
2. Korlátozott állásszög α_{max} ;
3. $\alpha_{N \max}$ állásszög, korlátozva $\alpha_{N \max}$ normál gyorsulásra, fokozatos közelítéssel az implicit egyenlet megoldásához

$$\alpha_{N \max} = C_N(M, \alpha_{N \max})QA/m \quad (8)$$

$\alpha_{N \max}$ -ra.

Az irányított állásszöget a következő egyenlet segítségével kapjuk meg:

$$a_{LA} = (QA/m)[C_N(M, \alpha_c) \cos \alpha_c - C_x(M, \alpha_c) \sin \alpha_c] \quad (9)$$

α_c -re. Ahol a_{LA} a kívánt aerodinamikai felhajtóerő gyorsulás. Ez kiszámítható a kívánt teljes felhajtóerő gyorsulásból (a_{Ld}), a következőképp

$$a_{LA} = a_{Ld} - 1_g g 1_L \quad (10)$$

ahol: A_{LA} az irányítási algoritmus által kiszámított és I_g nulla, ha a bemeneti irányítási paraméter nulla vagy negatív. Az irányítási algoritmus is kiszámolja az egység felhajtóerő vektort, amelynek jelölése I_L [3][4].

A rakéta pályagörbe a cél röppályájával együtt van integrálva. Az állapotvektornál, pillanatnyi i -nél, a következő mennyiségek vonatkoznak a rakéta mozgására:

idő t_i , helyzet $r(t_i)$, sebesség $v(t_i)$, gyorsulás $a(t_i)$,

$$f(t_i) = (10\sigma_i - 4\Delta_i\mu_i + 0,5\Delta_i^2 v_i)/\Delta_i^3 \quad (11a)$$

$$g(t_i) = (-15\sigma_i + 7\Delta_i\mu_i - \Delta_i^2 v_i)/\Delta_i^4 \quad (11b)$$

$$h(t_i) = (6\sigma_i - 3\Delta_i\mu_i + 0,5\Delta_i^2 v_i)/\Delta_i^5 \quad (11c)$$

Ahol

$$\sigma_i = r_{i+1} - r_i - \Delta_i v_i - 0,5\Delta_i^2 a_i \quad (12a)$$

$$\mu_i = v_{i+1} - v_i - \Delta_i a_i \quad (12b)$$

$$v_i = a_{i+1} - a_i \quad (12c)$$

$$\Delta_i = t_{i+1} - t_i \quad (12d)$$

Az $f(t_i)$, $g(t_i)$, és $h(t_i)$ vektorok funkcióját az előzőekben, az állapotvektoroknál kiszámítottuk, annak érdekében, hogy megfeleljenek a Taylor-sor bővülésnek $(t - t_i)$ r -re és v -re, és t , a $t_i \leq t < t_{i+1}$ időintervallum között. Ezután, ki tudjuk számítani az $r(t)$ -t, $v(t)$ -t, és $a(t)$ -t, az alábbiak szerint:

$$r(t) = r(t_i) + v(t_i)(t - t_i) + 0,5a(t_i)(t - t_i)^2 + f(t_i)(t - t_i)^3 + g(t_i)(t - t_i)^4 + h(t_i)(t - t_i)^5 \quad (13a)$$

$$v(t) = v(t_i) + a(t - t_i) + 3f(t_i)(t - t_i)^2 + 4g(t_i)(t - t_i)^3 + 5h(t_i)(t - t_i)^4 \quad (13b)$$

$$a(t) = a(t_i) + 6f(t_i)(t - t_i) + 12g(t_i)(t - t_i)^2 + 20h(t_i)(t - t_i)^3 \quad (13c)$$

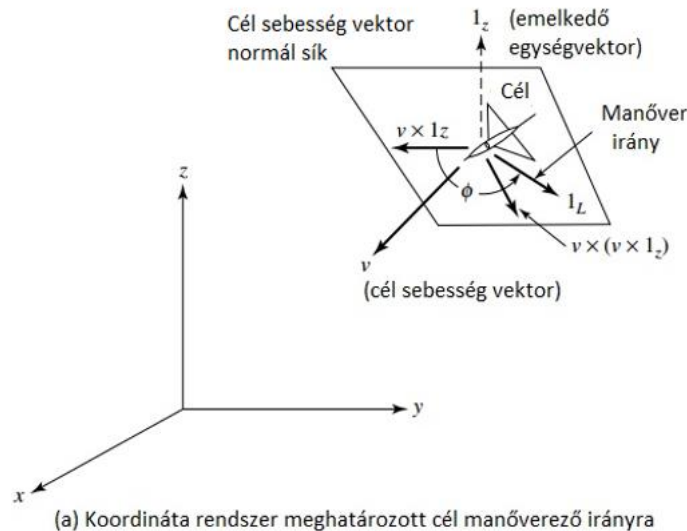
Most a cél mozgási modellel foglalkozunk. A cél repülőgép pályája leírható a kezdeti feltételekkel (helyzet és sebesség), és egy manőver megkezdési idejével. Manőver irányát az alábbiak szerint kell meghatározni: A sík, amelyet jelen esetben felhajtóerő síknak hívunk, merőleges a pillanatnyi sebességvektorra. Az 1_L felhajtóerő egységvektor ebben a síkban helyezkedik el, a 2(a) ábrán látható irányban és módon, az orsózó irányt szög (φ) miatt. A felhajtóerő nagysága (a_L) a következőképp számítható:

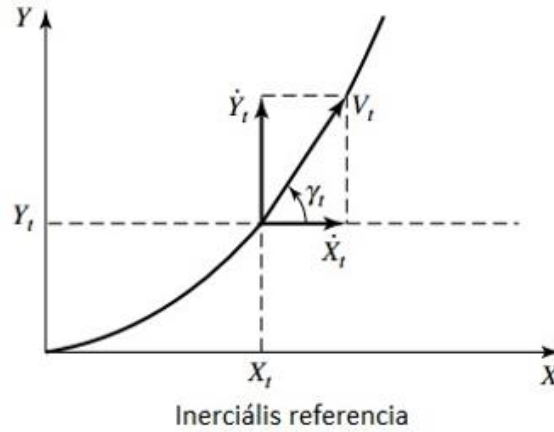
$$a_L = \omega_v |v_T| \quad (14)$$

Ahol ω_v a bemeneti sebességvektor fordulási szöge, v_T pedig a pillanatnyi cél sebesség vektora. Általában a cél mozgásegyenlete a következőképp írható fel:

$$\frac{dr_T}{dt} = v_T \quad (15a)$$

$$\frac{dv_T}{dt} = a_T = a_v 1_v + a_L 1_L \quad (15b)$$





(b) A cél repülési pályája

2. ábra. Síkbeli cél manőver és pálya⁴

Ahol, r_T , v_T , és a_T a cél helyzet, sebesség és gyorsulás vektorok, és 1_V és 1_L egységvektorok a sebesség és a felhajtóerő irányában. Feltételezve, hogy a cél pályája fel van osztva és manőverekkel vagy anélkül, ω_v nem nulla (manőver ideje alatt, a repülés során), így az egyenletek numerikusan integrálhatóak az ún. „Runge-Kutta módszer”⁵ segítségével, jellemzően 1 másodperces lépésközzel. Az integráció minden manőver szegmens végén megszűnik, és a következő szegmensben újraindul. Azokban a szegmensekben, amelyekben $\omega_v = 0$ (azaz nem fordul), a numerikus integrálás ki van iktatva.

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + v(t_i)\Delta_i + 0,5a(t_i)\Delta_i^2 \quad (15c)$$

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + a(t_i)\Delta_i \quad (15d)$$

$$a(t_{i+1}) = a(t_i) \quad (15e)$$

Ahol $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$, akkor használható, amikor a gyorsulás (ha van ilyen), csak a sebességvektor mentén van.

A kitérő manőver (lásd: 2. ábra (b)) meghatározza a cél abszolút gyorsulását (a_T). Ezen feltételek mellett, a cél mozgása (tekintettel a tehetetlenségi vonatkoztatási XY koordináta rendszerre) a következő mozgásegyenletekkel határozható meg:

$$\frac{dx_T}{dt} = v_T \cos(\omega_T t + \gamma_{T0}), \quad (15f)$$

$$\frac{dy_T}{dt} = v_T \sin(\omega_T t + \gamma_{T0}), \quad (15g)$$

$$\frac{d\omega_T}{dt} = \frac{dy_{T0}}{dt} = \frac{g\sqrt{(a_T^2 - 1)}}{v_T}, \quad (15h)$$

Ahol:

x_T = cél pozíció [m];

⁴ Készítette: a szerző. A következő forrás alapján: http://cdn.preterhuman.net/texts/terrorism_and_pyrotechnics/rocketry/Missiles_and_Warheads/Missile%20Guidance%20&%20Control%20Systems.pdf (180. oldalon)

⁵ A Runge–Kutta-módszerek családja a differenciálegyenletek numerikus analízisének széles körben ismert és alkalmazott közelítő eljárása, amelyet Carl Runge és Martin Kutta német matematikusok dolgoztak ki 1900 körül.

y_T = cél pozíció koordinálása [m];
 a_T = cél teljes gyorsulása [g];
 v_T = cél sebessége [m/sec];
 g = gravitációs gyorsulás [m/s²];
 γ_{T0} = cél kezdeti repülési útvonalának szöge [rad];
 γ_T = cél repülési útvonal szöge [rad];
 ω_T = cél szögsebessége [rad/s] [3].

Felhasznált irodalom

- [1] Dr. Szilvássy László –Harci helikopterek fegyverei II.: Irányítható rakétafegyverzet., Repüléstudományi Közlemények XXII/1., p. online, 9 p., url: http://www.repulestudomany.hu/folyoirat/2010_1/2010_1_Szilvassy_Laszlo.html
- [2] The Fundamentals of Aircraft Combat Survivability Analysis and Design, R.E. Ball, AIAA Education Series, copyright© 1985.
- [3] George M. Siouris - Missile Guidance and Control Systems, ISBN 978-1-4419-1835-2 Springer, USA
- [4] Chih-MinLin, Chun-FeiHsu, Shing-KuoChang and Rong-JongWai - Guidance Law Evaluation For Missile Guidance Systems. Asian Journal of Control, Vol. 2, No. 4, pp. 243-250, December 2000.