

VIII. Évfolyam 4. szám - 2013. december

Gyarmati József
gyarmati.jozsef@uni-nke.hu

LINEÁRIS ALGEBRA ALKALMAZÁSA A KRITIKUS INFRASTRUKTÚRA KOCKÁZATÁNAK KEZELÉSÉBEN

Absztrakt

A kockázatok becslése meghatározó része a kockázatkezelésnek. A cél csökkenteni a kritikus infrastruktúra kockázatát az optimális költség megtartásával. Ennek megfelelően ez egy optimalizációs feladat, ahol egyensúlyt kell keresni a kockázat és a költségek között. A probléma megoldásához kiinduló adatokra van szükség, amelyek számítására mutat példát ez a cikk. A cikkben lineáris algebra felhasználásával kerülnek becslésre a kritikus infrastruktúra kockázatai.

The estimation of risk is the basic of the risk management. The purpose is to decrease the risk of critical infrastructure and that has optimal cost. Based on it this is an optimization process that balances between cost and risk. Current risk estimation need for good solution of the mentioned problem. This paper shows a risk estimation example using linear programming.

Kulcsszavak: *kritikus infrastruktúra, kockázat ~ critical infrastructure, risk*

BEVEZETÉS

A kockázatkezelés egy meghatározó része a kockázatok nagyságának meghatározása. A kockázati értékek különböző módszerekkel történő becslésének a célja a kockázatos helyzetet elkerülő magatartások vagy a megelőző intézkedések meghozatalának a tervezése. A tervezéshez szükségesek a kockázat mérséklésére vonatkozó intézkedések költségei.

A kockázatkezelés során a számba jöhető kockázatokat értékelik, illetve rangsorolják, ugyanígy történik a kritikus infrastruktúra kockázatával is. A rendelkezésre álló matematikai modellek száma rendkívül széleskörű, amit alátámaszt a szakirodalom által felhasznált matematika eszköztár sokrétősége.

Jelen cikkben a lineáris algebra lett felhasználva, ezen belül a lineáris programozás. A lineáris programozási feladat feltétele szerint a modell alapvetően erőforrások elosztását képes vizsgálni. Az erőforrások korlátokkal rendelkeznek. A rendszer üzemeltetője többféleképpen vizsgálható, ha a fő tevékenységét vesszük figyelembe és valamilyen termelő tevékenységet végez, akkor az üzemeltető célja a bevételeinek a maximálása. A bevételt valamilyen korlátokkal rendelkező erőforrás felhasználásával készített termék értékesítésével nyeri. A rendszert támadó célja a bevétel minimálása, de eközben a támadó is korlátozott erőforrásokkal rendelkezik.

A második vizsgálható esetben a rendszer üzemeltetőjének az üzemeltetési költségeit vesszük alapul, ezt a költséget az üzemeltető minimálni, míg a támadó maximálni akarja, miközben mindkét fél korlátozott erőforrásokkal rendelkezik.

Az optimálási feladat jól láthatóan két lépcsőből tevődik össze egy maximum és egy minimum feladat illetve fordítva, ami egy ún. kétszintű programozási feladat. A cikk kiindulva a rendszer üzemeltetőjének és a támadójának a külön-külön vizsgálatából eljut az ilyen feladatok megoldására leggyakrabban használt többszintű programozási feladatok bevezetéséig.

A cikk nem foglalkozik a megalkotott lineáris programozások megoldásával, a címnek megfelelően csak a modellek kerülnek megalkotásra. A megoldást számos szakirodalom tartalmazza például (Hillier, 1994).

A megalkotott modellek jobb érthetősége érdekében az alkalmazás, vagyis a modellalkotás folyamata minden esetben gyakorlati példán keresztül kerül bemutatásra.

A VÉDELEMRE FORDÍTOTT FORRÁSOK ELOSZTÁSA LINEÁRIS PROGRAMOZÁS SEGÍTSÉGÉVEL DUÁLVÁLTOZÓ FELHASZNÁLÁSÁVAL

A jelen pontban szeplő és a lineáris algebrában használt fogalmak és összefüggések megértéséhez a (Hillier, 1994) irodalom nyújt segítséget.

Legyen n darab védelmi rendszer, amelyek m számú terület védelmét látják el. Az egyes területeken az elvárt védelmi szinteket jelölje c_i . Ismert a védelmi rendszerek egységnyi intervallumra vonatkozó üzemeltetésének a b_j költsége és ismert, hogy az egyes védelmi rendszerek milyen mértékben járulnak hozzá a védett területek védelmi szintjéhez, amit a_{ij} mutat. A rendszer üzemeltetőjének a feladata, hogy meghatározza az egyes védelmi rendszerek üzemeltetési arányát avval a feltétellel, hogy:

- az egyes területek elvárt védelmi szintek megvalósuljanak és;
- a védelmi rendszerek üzemeltetési költségének minimálás legyen.

A feladat a következő lineáris programozási feladat segítségével fogalmazható meg:

$$\min_{\mathbf{y}} \{\mathbf{b}^T \mathbf{y}\} \quad (1)$$

és

$$\mathbf{A} \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$$

$$\mathbf{y} \geq 0,$$

ahol:

- $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ a j -edik védelmi rendszer egységnyi volumenű üzemeltetésével az i -edik védett területhez hozzáadott védelmi szint és $i = 1 \dots m, j = 1 \dots n$;
- $\mathbf{b} = [b_j]$ a j -edik védelmi rendszer egységre vonatkozó üzemeltetési költsége;
- $\mathbf{c} = [c_i]$ az i -edik védelmi területen minimálisan elvárt védelmi szint;
- $\mathbf{y} = [y_j]$ döntési (primál) változó, amely kifejezi a j -edik védelmi rendszer többihez viszonyított üzemeltetési arányát.

A rendszer üzemeltetőjének kettős célja van: biztosítani az elvárt védelmi szinteket és minimálni a védelmi rendszerek üzemeltetési költségét. A céljait a (1) egyenletben megfogalmazott lineáris programozási feladat megoldása révén tudja megvalósítani.

Tételezzük fel, hogy a rendszer üzemeltetője nem saját forrásból építi ki a védelmet, hanem erre külső vállalkozót keres. Ebben az esetben lényeges lesz az a kérdés, hogy az egyes területek különböző védelmi szintjeiért legfeljebb mekkora összeg fizethető ki. A megoldást az (1) un. duálpárja szolgáltatja, amelyet a (2) egyenlet mutat.

$$\max_{\mathbf{x}} \{\mathbf{c}^T \mathbf{x}\} \quad (2)$$

és

$$\mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0,$$

ahol:

$\mathbf{x} = [x_i]$ döntési (duál) változó.

A duálváltozó megegyezik a primálfeladat un. árnyékárával, vagyis megmutatja, hogy a primálfeladatban megadott jelen esetben alsó határ (\mathbf{b}) egységnyi növekedése milyen mértékben változtatja meg a célfüggvény értékét.

1. PÉLDA. Legyen három védelmi rendszer: A, B, C, amelyek négy védelmi területen fejtik ki a hatásukat. Legyen továbbá négy védett terület: V_1, V_2, V_3, V_4 . Az A rendszer például az V_1 -es és a V_3 -as védett terület védelmi szintjét egy-egy egységgel növeli, a többi védett terület védelmét viszont nem befolyásolja. Az egyes területeken elvárt védelmi szintek rendre $\{1,2,2,1\}$. A védelmi rendszerek üzemeltetési költsége rendre $\{2,3,2\}$. Az (1) egyenlet szerinti lineáris programozási feladatot a (3) egyenlet mutatja.

$$\begin{aligned} y_1 + \quad + y_3 &\geq 1 \\ \quad 2y_2 &\geq 2 \\ y_1 + 2y_2 &\geq 2 \\ y_1 + \quad + y_3 &\geq 1 \end{aligned} \quad (3)$$

és

$$\begin{aligned} y_j &\geq 0 \quad j = 1 \dots 4 \\ \min_{\mathbf{y}} \{2y_1 + 3y_2 + 2y_3\} \end{aligned}$$

A feladatot a megoldással együtt az 1. táblázat mutatja. Megoldás az A és a B rendszerek azonos volumenű üzemeltetését javasolja és a C rendszer kizárását. Az üzemeltetőnek tehát az erőforrásait az A és a B között azonos arányban kell felosztania, amelyhez a minimális, vagyis fajlagosan 5 egységnyi üzemeltetési költség adódik.

		Védelmi rendszer			Védelmi szint	
		A	B	C	elvárt	teljesített
Védett terület	1	1	0	1	1	1
	2	0	2	0	2	2
	3	1	2	0	2	3
	4	1	0	1	1	1
Üzemeltetési költség		2	3	2		
Primálváltozó		1	1	0		
Célfüggvény		5				

Ha az üzemeltető a védett területekhez tartozó védelmi szintekhez tartozó költségekre kíváncsi, akkor az árnyékarok kell megkeresni, ami megegyezik a duálváltozókkal. A (3) egyenlethez tartozó duálfeladatot a (4) egyenlet mutatja.

$$\begin{aligned}
 x_1 + \quad + x_3 + x_4 &\leq 2 \\
 2x_2 + 2x_3 &\leq 3 \\
 x_1 + \quad + x_4 &\leq 2
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

és

$$\begin{aligned}
 x_i &\geq 0 \quad i = 1 \dots 3 \\
 \max_x \{ &x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \}
 \end{aligned}$$

A (4) lineáris programozási feladat megoldást a 2. táblázat mutatja. A táblázatból látható, hogy a célfüggvény értéke megegyezik a primálfeladat célfüggvényének értékével.

		Védett terület				Üzemeltetési költség	
		1	2	3	4	max.	tényleges
Védelmi rendszer	A	1	0	1	1	2	2
	B	0	2	2	0	3	3
	C	1	0	0	1	2	2
Elvárt védelmi szint		1	2	2	1		
Duálváltozó		2	1,5	0	0		
Célfüggvény		5					

¹ Saját táblázat.

² Saját táblázat.

A duálváltozók a 4. táblázat szerint rendre $\{2, 1,5, 0, 0\}$, vagyis a 1-es védett terület esetében a védelmi szint növelése 2 egységgel növeli meg az üzemeltetési költséget, amit a célfüggvény mutat, ugyanez a 2-es rendszer esetében 1,5. A duálváltozók alkalmazását a 3. táblázat mutatja. A táblázatban a primálfeladat (1. táblázat) korlátozó feltételei lettek módosítva. Az 1-es és a 2-es terület elvárt védelmi szintje itt egy-egy egységgel van növelve, ami a célfüggvény $1 \times 2 + 1 \times 1,5 = 3,5$ -el történő emelkedését vonja maga után.

		Védelmi rendszer			Védelmi szint	
		A	B	C	elvárt	teljesített
Védett terület	1	1	0	1	2	2
	2	0	2	0	3	3
	3	1	2	0	2	5
	4	1	0	1	1	2
Üzemeltetési költség		2	3	2		
Primálváltozó		2	1,5	0		
Célfüggvény		8,5				

VÉDELEMRE FORDÍTOTT FORRÁSOK ELOSZTÁSA LINEÁRIS PROGRAMOZÁS SEGÍTSÉGÉVEL A TERMELÉS FŐ FOLYAMÁNAK ÉRZÉKENYSÉGVIZSGÁLATÁVAL

Legyen egy üzem, ami T_1, T_2, \dots, T_m terméket állít elő F_1, F_2, \dots, F_n erőforrás felhasználásával. A termékek egységnyi értékesítési ára legyen c_1, c_2, \dots, c_m . A források k_1, k_2, \dots, k_m kapacitáskorlátokkal rendelkeznek és T_j termék előállításához F_i forrásból a_{ij} mennyiségre van szükség. Az üzemeltető célja a termékek előállítási arányának olyan meghatározása, ami a bevételt maximálja, ezt a következő lineáris programozási feladat megoldásával érheti el:

$$\max_{\mathbf{x}} \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \} \quad (5)$$

és

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{k}$$

$$\mathbf{x} \geq 0,$$

ahol:

- $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ egységnyi mennyiségű j -edik termék gyártásához az i -edik forrásból felhasznált mennyiség, $i = 1 \dots m, j = 1 \dots n$;
- $\mathbf{k} = [k_i]$ a i -edik forrás kapacitáskorlátja;
- $\mathbf{c} = [c_j]$ az j -edik termék egységára;
- $\mathbf{x} = [x_j]$ döntési (primál) változó, amely kifejezi a j -edik termék többihez viszonyított előállítási arányát.

A gyártás kapacitáselosztása ezzel megoldott, de hogyan osztja el a védelemre fordítható kapacitáit, ha a termelés biztonságtechnikai szempontból csak a források tekintetében osztható fel, vagyis biztonságtechnikailag csak a források védhetőek. A védekezésre fordított

³ Saját táblázat

költségnek arányban kell lennie a források költségeivel, ami az üzemeltető rendelkezésére kell, hogy álljon, viszont lényegesen pontosabb információ lehető abból, ha a források nyereségből való részesedése lenne meghatározó. Ezt az összeget az előző példa gondolatmenet alapján a duálfeladat megoldása szolgáltatja, ami megegyezik a források árnyékárával.

2. PÉLDA. Legyen három termék melyek rendre {2,3,2} egységnyi összegen értékesítenek és négy forrás melyek kapacitáskorlátaik {1,2,3,2}. Az egyes termékek gyártásához szükséges források mennyisége:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

A példa adatait és az eredményeket foglalja egybe a 4. táblázat.

		Termék			Kapacitás	
		T ₁	T ₂	T ₃	korlát	felhasznált
Forrás	F ₁	1	0	1	1	1
	F ₂	0	2	1	2	2
	F ₃	2	2	1	3	3
	F ₄	1	1	1	2	1,75
	Bevétel	2	3	2		
Primálváltozó		0,5	0,75	0,5		
Célfüggvény		4,25				

Az eredmények alapján a termelés elosztása már megvalósítható viszont a biztonságtechnikai elemzéshez szükség van érzékenységvizsgálatra, ami jelen esetben az Ms Excel Solver makrójával lett elvégezve, az eredményeket az 5. táblázat mutatja.

		5. táblázat ⁵				
Cella	Név	Végző Érték	Árnyék- ár	Korlátozó feltétel - jobb oldal	Megengedhető Növelés	Megengedhető Csökkentés
\$G\$5	F ₁ felhasznált	1	0,5	1	0,5	0,5
\$G\$6	F ₂ felhasznált	2	0,75	2	1	1
\$G\$7	F ₃ felhasznált	3	0,75	3	1	1
\$G\$8	F ₄ felhasznált	1,75	0	2	1E+30	0,25

Az 5. táblázatból az árnyékárak leolvashatók viszont a program ezen felül megadja azon intervallumot, amelyen belül ezek az értékek érvényesek. Biztonsági értelmezésben az F₄ forráshoz tartozó árnyékár nulla, vagyis az ide tartozó kapacitás csökkenés nem eredményezi a bevétel csökkenését, de csak legfeljebb 0,25 egységig történő csökkenés esetében. Az F₄ forrás ilyen határon belül történő rongálódása tehát nem befolyásolja a bevételt. Az F₁ forrás 0,5 egységű kapacitáscsökkenése 0,25 egységgel csökkenti a bevételt, míg F₂ és F₃ egységnyi kapacitáscsökkenése egyenként 0,75 egységgel csökkenti a bevételt.

⁴ Saját táblázat

⁵ Saját táblázat

TÁMADÓ-VÉDŐ MODELL

Legyen R_1, R_2, \dots, R_n rendszer, amelyeket az üzemeltető c_1, c_2, \dots, c_n fajlagos költséggel üzemeltet. Célja az üzemeltetési költségek minimálása, amelyet a következő lineáris programozási feladat segítségével old meg:

$$\min_{y \in Y} \{c^T y\}, \quad (6)$$

ahol Y reprezentálja az üzemeltető döntéshozatalát korlátozó tényezőket például a kapacitásokat. A támadó a rendszer erőforrásait támadja a cselekedetei x_k bináris változó segítségével van figyelembe véve, ahol $x_k = \{1, 0\}$ és ha $x_k = 1$ akkor minden $y_j = 0$ amelyhez tartozó kimenet a k -adik forrást igényli. A támadó lehetséges cselekedeteit, figyelembe véve a részéről is korlátozott erőforrásokat az $x \in X$ vektor tartalmazza. Figyelembe véve a támadó tevékenységét a védő döntési lehetőségei a $y \in Y(x)$ szerint értelmezhetők. A támadónak a következő problémát kell megoldani, hogy maximálja a védő minimális üzemeltetési költségét:

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y(x)} \{c^T y\} \quad (7)$$

A (7) egyenlettel leírt modellel a nemzetközi szakirodalom széleskörűen foglalkozik, erre mutat példát a (Zhuang, 2010) és (Bell, 2008). A kétszereplős játék a következő jellemzőkkel bír:

- az egyik játékos nyeresége nem egyezik meg a másik játékos veszteségével;
- a játékosok a saját céljaiknak megfelelően hozzák meg a döntéseiket;
- a második játékos racionálisan reagál az első játékos döntéseire;
- a játékosok számára a modellben lévő információ a rendelkezésükre áll;
- a játékosok nem kooperálnak egymással.

A (7) egyenlet un. kétszintű programozással oldható meg (Omar, 1993).

ÖSSZEGZÉS

A cikkben bemutatásra került a lineáris programozás felhasználása a kritikus infrastruktúra kockázatának kezelésében.

A lineáris programozás során min a támadó mind pedig az üzemeltet részéről értelmezve lettek a primálfeladat változói és konstansai valamint a duálfeladat változói.

A programozási feladatok megoldása során következmény a támadó és az üzemeltető tevékenységének az összekapcsolása a támadó-védő modell szerint egy un. kettő vagy többszintű programozásai feladatba.

A CIKK A CIVIL-KATONAI PARTNERSÉG, KÖZLEKEDÉSI KRITIKUS INFRASTRUKTÚRA VÉDELEM TÁMOP-4.2.1.B-11/2/KMR-2011-0001. SZÁMÚ PÁLYÁZAT TÁMOGATÁSÁVAL KÉSZÜLT.

Felhasznált irodalom

- [1] Bell, M. (2008). Attacker-defender models and road network vulnerability. *Philosophical Transaction of the Royal Society*, 1893-1906.
- [2] Brown, G. C. (2006 vol. 36 no. 6). Defending Critical Infrastructure. *The INFORMS Journal on the Practice of Operation Research*, 530-544.
- [3] Hillier, F. L. (1994). *Bevezetés az operációkutatásba*. Budapest: LSI Oktatóközpont.

- [4] Omar, B. A. (1993). Bilevel linear programming. *Computers & Operation Research*, 485-501.
- [5] Zhuang, J. B. (2010). Modeling secrecy and deception in a multiple-period attacker-defender signaling game. *European Journal of Operation Research*, 409-4018.