

VIII. Évfolyam 2. szám - 2013. június

Szabolcsi Róbert
szabolcsi.robort@uni-nke.hu

UAV ELASZTIKUS MOZGÁSÁNAK MODELLEZÉSE

Absztrakt

A pilóta nélküli légi jármű rendszerek eleme, maga a légi jármű, az utóbbi időkben utolérte az elméletet. Az 1930-as években lefektetett matematikai elméleti alapok a gyakorlatban vizsgáznak. A modern UAV nagyon sokszor nem hagyományos sárkányszerkezeti elrendezéssel rendelkezik: valóban extrém aerodinamikai elrendezés alkalmazásához nyúlnak a tervezők. Ha ránézünk egy modern UAV-ra, sokszor felmerül a kérdés, van-e klasszikus értelemben vett törzse, vagy szárnya?! Hol maradnak el a vezérsíkok?! A modern, és a poszt-modern szabályozástechnika elterjedésével gyakorlatilag a téglák is „megtanítható” repülni. Az elasztikus tulajdonságokkal bíró UAV sárkányszerkezete mozgásának leírása kiemelten fontos nemcsak a terhelési korlátozások és az anyagfáradás figyelembe vétele miatt, hanem a fedélzeti érzékelőkre, azok elhelyezésére gyakorolt hatás minimalása miatt is kiemelt fontosságú az UAV viselkedésének ismerete.

The UAV systems being highly aeroelastic ones are in the focus of attention since many decades. The mathematical basics of the aeroelasticity are well-known from 30's and widely applied in aircraft design. The modern UAV aerodynamic design often shows unconventional point of view. Sometimes arise many questions: is there any fuselage, or wing, in classical understanding, or not?! Is there any tail?! Using latest results from modern-, and post-modern control theory extreme aerodynamic body can be taught to fly. The elastic motion and its analysis is important one not only from fatigue aspects but important from the point of view of the derivation of the sensor locations to have minimized affects of elastic motion on themselves.

Kulcsszavak: UAV, elasztikus mozgás, mechanikai lengő rendszerek, matematikai modellek ~ UAV, elastic motion

1. BEVEZETÉS

Az elmúlt évtizedekben tapasztalható rohamléptékű fejlődés nyomán úgy a polgári, mint a katonai repülőgépek tervezési követelményei, illetve a sárkányszerkezeti kialakításai megváltoztak: nagy terhelések elviselésére is alkalmas, vékony és karcsú szárnyakat, illetve törzset kezdtek alkalmazni, ezzel biztosítva a kis felszállási tömegeket. A légijárművek tervezésekor a tervezők folyamatosan eltávolodtak a hagyományos tervezési eljárásoktól, és teljesen újszerű megoldásokhoz nyúltak a célok elérése érdekében.

Az új tervezési paradigmák, a kompozit anyagok széleskörű használata óhatatlanul is könnyű, és rugalmas repülőgépeket eredményeztek. A repülőgép rugalmas deformációja során a rugalmas repülőgép a merev repülőgéphez képest számottevő értékű szerkezeti elmozdulásokat, rugalmas deformációkat, alakváltozásokat, elváltozásokat mutat.

A repülőgép rugalmas deformációja bekövetkezhet a repülőgép pilóta által végrehajtott kormányzása, vagy a légköri turbulencián hatására a sárkányszerkezeten ébredő, és változó terhelőerők és nyomatékok miatt. A repülőgép rugalmas deformációja, valamint a nagy értékű dinamikus terhelések miatt csökken a repülőgép számított élettartama. A turbulens áramláson áthaladó repülőgépen keletkező dinamikus terhelések, és a rugalmas deformáció értéke attól függ, hogy a turbulencia milyen értékű energiát ad át a repülőgép sárkányszerkezetének lengésképeit alkotó alap-, illetve felharmonikusokkal. A repülőgép rugalmas deformációja során a merev repülőgép és a rugalmas deformáció lengésképei közötti energialengések lényeges mértékben rontják a repülőgép irányítási, és kormányzási jellemzőit.

Az utóbbi években főleg a HALE¹ pilótánélküli légijárműveken figyelhetjük meg, hogy a klasszikus értelemben vett sárkányszerkezeti elemeket (törzs, szárny, vezérsík stb.) már nem is tudjuk megkülönböztetni. A szerző célja bemutatni néhány UAV alkalmazást, ahol a légijármű szerkezeti deformációja nagyon is szembe tűnő, valamint összefoglalni a szárny-, és a törzs deformációra vonatkozó elmélet-, és gyakorlati ismereteket.

2. IRODALMI ÁTTEKINTÉS, ELŐZMÉNYEK

A légi járművek törzs-, és szárny deformáció elasztikus mozgásának egzakt matematikai leírását a [2, 3, 16] irodalmak foglalják össze. Mechanikai lengő-, rezgő rendszerek leírásával [7] foglalkozik behatóan. Repülőgépek, és más légijárművek aeroelasztikus mozgásának matematikai modellezését [1, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14] irodalmak foglalják össze: a rugalmas mozgás dinamikáját, mint additív paraméterbizonytalanságot modellezik.

Szabolcsi vadászrepülőgép törzs deformációja esetére dinamikus szabályozó tervezését mutatja be a [17] cikkében. Szabolcsi és Szegedi a légijárművek fedélzetén használt szögsebesség-érzékelőkhöz speciális szűrőt tervezett, ami csökkentette az érzékelők mérésének módszeres hibáját [15, 18, 26].

UAV repülésdinamikai kérdéseivel az [5, 6] irodalmak foglalkoznak részletesen. Az UAV és az UAS rendszerek koncepcionális tervezésével, a várható alkalmazói követelmények meghatározásával a szerző foglalkozott a [19, 20, 21, 22, 23] munkáiban.

A szerző UAV repülési pályájának optimálás koncepcionális tervezését mutatta be [24], majd LQ-alapú optimális szabályozót tervezett az alapjel követési feladatok megoldására [27]. Szabolcsi összefoglaló művében foglalkozik a légijárművek aeroelasztikus mozgásának matematikai modellezésével is [25].

¹ High Endurance Long Altitude - HALE

3. NÉHÁNY PÉLDA AZ ELASZTIKUS UAV SZERKEZETEKRE

Manapság számos UAV tervezése nemhagyományos sárkányszerkezeti megoldásra vezet. A teljesség igénye mellett, de a terjedelmi korlátok miatt, röviden tekintsük át néhány UAV alkalmazást.

A HALE kategóriájú Helios UAV napelemtől táplált villamos motoros hajtással rendelkezik (1. ábra). Az UAV alapvetően stratégiai felderítő feladatokat lát el.

Az 1. ábra lapján könnyen belátható, hogy az UAV klasszikus értelemben vett törzssel, vagy szárnnyal nem rendelkezik. A propulziós rendszer, a fedélzeti szenzorika, és egyéb berendezések a geometriai méretek, és az építés során használt speciális anyagok és technológiák miatt az UAV viszont elasztikus mozgásra kifejezetten hajlamos.



1. ábra. Helios Solar HALE UAV (Forrás: www.google.com)

Az „AeroVironment” UAV szintén stratégiai célú felderítő repülések végrehajtására tervezték (2. ábra). A légi jármű sárkányszerkezete ugyan rendelkezik törzssel, és szárnnyal, de a törzs gyakorlatilag egy karcsú rúd, és a farok részen elhelyezett vezérsík tartására szolgál, azon érdemi felhajtóerő nem ébred. Az UAV nagy feszítávolsággal rendelkezik, a szárny karcsú és vékony, ami előre vetíti annak elasztikus lengési hajlamát.



2. ábra. Az „AeroVironment” HALE UAV
(Forrás: www.google.com).

A következő példa legyen a „Zephyr” HALE UAV, amely az aerodinamikai elrendezése miatt szintén hajlamos a külső erők és nyomatékok hatása alatt a rugalmas deformációra (3. ábra).



3. ábra. Zephyr HALE Solar UAV (www.google.com).

4. A SZÁRNY HAJLÍTÓ MOZGÁSA

Ismeretes, hogy a szárnyak felhajtóereje az alábbi összefüggés alapján számítható [2, 3, 13, 25]:

$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 S \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \alpha = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_{L\alpha} \alpha, \quad (4.1)$$

ahol ρ a levegő sűrűsége a h repülési magasságon, α állásszög, S szárnyfelület, $C_{L\alpha}$ derivatív együttható, és végül, V a levegőáramlás sebessége.

A (4.1) egyenletben a dinamikus nyomás értéke a következő lesz:

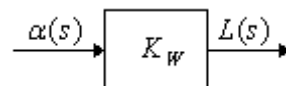
$$\bar{q} = \frac{1}{2} \rho V^2. \quad (4.2)$$

A (4.1) egyenlet a következő alakban is felírható:

$$L = \bar{q} S C_{L\alpha} \alpha = K_W \alpha, \quad (4.3)$$

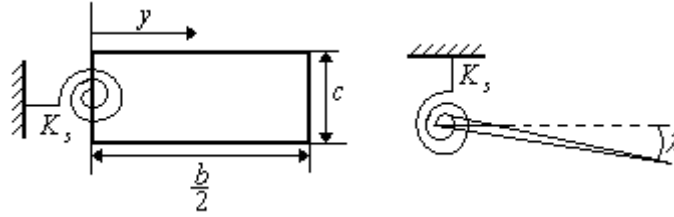
ahol $K_W = \bar{q} S C_{L\alpha}$.

A merev repülőgép szárnyain keletkező felhajtóerő (4.3) egyenletét a 4. ábra reprezentálja.



4. ábra. A merev szárny lineáris matematikai modellje [25].

Ha a merev repülőgép nem nyilazott, téglalap alakú szárnya c húrral és $b/2$ fesztávolsággal rendelkezik (5. ábra), és a szárnytőben rögzített, akkor a szárny egy szabadságfokú, hajlító mozgást végez a bekötési csomópont (csukló) körül. Az 5. ábrán K_s a rugómerevség, λ a szárny elhajlásának szöge. A λ elhajlási szög pozitív előjelű, ha a szárny a merev állapottól lefelé hajlik el (5. ábra). A K_s rugómerevség a szárnyak alap-harmonikussal történő elhajlításakor a hajlító szilárságát adja meg [13, 25]:



5. ábra. Csuklóval rögzített merev szárny helyettesítő képe [25].

Elasztikus mozgása során a szárny tehetetlenségi nyomatékkal is bír, amelyet a következő egyenlettel határozhatunk meg:

$$I = \int y^2 dm, \quad (4.4)$$

dm a szárny elemi tömegét jelöli, míg y futó-koordináta a $b/2$ fesztávolság mentén. Az 5. ábra alapján a szárny elhajlására a következő mozgásegyenlet írható fel:

$$I\ddot{\lambda} + K_s\lambda = 0. \quad (4.5)$$

Megemlítjük, hogy a (4.5) egyenlet felírása során feltételeztük a repülőgép nyugodt levegőben repül, valamint a szárnyak saját csillapítással nem rendelkeznek. A (4.5) egyenlet egyszerű matematikai átalakítások után a következő alakban adható meg:

$$\ddot{\lambda} + \omega^2\lambda = 0, \quad (4.6)$$

ahol

$$\omega = \sqrt{\frac{K_s}{I}} \quad (4.7)$$

a szárny hajlító mozgásának természetes körfrekvenciája. Ha a vizsgált téglalap alakú szárny V relatív sebességű levegőáramlásban van, akkor a fesztáv mentén y távolságra lévő elemi szárnyrész a szárny fel-, vagy lehajlásakor $y\dot{\lambda}$ sebességgel mozog, minek következtében az adott elemi szárnymetszet támadásszöge $\frac{y\dot{\lambda}}{V}$ szöggel változik és a keletkező felhajtóerő $\frac{1}{2}\rho V^2 C_{L_\alpha} \left(\frac{y\dot{\lambda}}{V}\right) \bar{c}$ értékkel módosul, nő, vagy csökken. Ennek megfelelően a szárny hajlító mozgásának egyenlete az alábbi kifejezéssel adható meg [13, 25]:

$$I\ddot{\lambda} + K_s\lambda = -\frac{1}{2}\rho V^2 \int_0^{\frac{b}{2}} \bar{c} C_{L_\alpha} \left(\frac{y}{V}\dot{\lambda}\right) y dy = -\bar{q} \frac{\bar{c} C_{L_\alpha}}{V} \dot{\lambda} \int_0^{\frac{b}{2}} y^2 dy = -\bar{q} \frac{\bar{c} C_{L_\alpha}}{V} \dot{\lambda} \frac{b^3}{24}. \quad (4.8)$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$S = b \frac{\bar{c}}{2}. \quad (4.9)$$

A (4.8) egyenlet ily módon a következő egyenlettel helyettesíthető:

$$I\ddot{\lambda} + K_s\lambda = -\frac{K_w b^2}{12V} \dot{\lambda}, \quad (4.10)$$

vagy más alakban:

$$\ddot{\lambda} + \frac{K_w b^2}{12VI} \dot{\lambda} + \frac{K_s}{I} \lambda = 0, \quad (4.11)$$

$$\ddot{\lambda} + 2\xi\omega\dot{\lambda} + \omega^2\lambda = 0, \quad (4.12)$$

ahol

$$\xi = K_w b^2 / 24V \sqrt{\frac{K_s}{I}} - \text{csillapítási tényező.} \quad (4.13)$$

Összefoglalva az eddig elhangzottakat: a szárny lehajló mozgásának dinamikáját a (4.12) lineáris, másodrendű, homogén differenciál-egyenlet írja el, melynek megoldására számos módszer ismert matematikából.

5. A SZÁRNY CSAVARÓ MOZGÁSA

További vizsgálataink során feltételezzük, hogy Az 5. ábrán látható szárny a bekötés helyén a tengely körül – a terhelések hatására – csavaró mozgást végez. A szárny csavaró mozgását vizsgáljuk meg a 6. ábrán. Feltételezzük továbbá, hogy a repülőgép nyugodt levegőben repül, valamint a szárnyak saját csillapítással nem rendelkeznek, így a csavaró mozgás egyenlete a következő kifejezéssel adható meg [13, 25]:

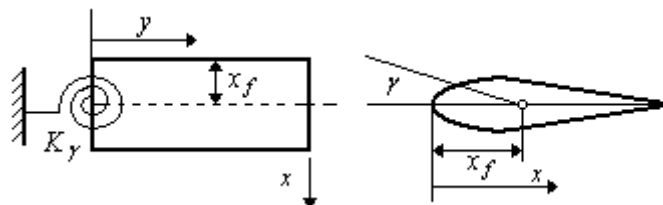
$$I_\gamma \ddot{\gamma} + K_\gamma \gamma = 0, \quad (5.1)$$

ahol:

$$I_\gamma = \int (x - x_f)^2 dm. \quad (5.2)$$

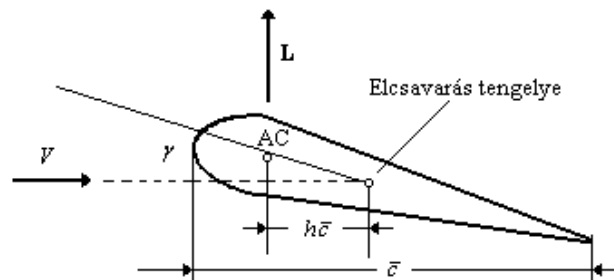
A szárny csillapítatlan csavaró mozgásának természetes körfrekvenciája az alábbi kifejezés szerint határozható meg:

$$\omega_\gamma^2 = K_\gamma (I_\gamma)^{-1}. \quad (5.3)$$



6. ábra. Csuklóval rögzített merev szárny és szárnymetszet csavaró deformációja [25].

Ha a repülőgép a levegőhöz mért V relatív sebességgel repül a levegőáramban, akkor az aerodinamikai centrumban (AC) L felhajtóerő ébred (7. ábra). E pont $h\bar{c}$ távolságra az elcsavarás tengelye előtt helyezkedik el.



7. ábra. Az aerodinamikai centrum értelmezése [25].

Ha a szárnyprofil szimmetrikus, akkor az aerodinamikai centrum (AC) körül a statikus nyomaték zérusértékű. Az 5., 6., és a 7. ábrák alapján a fél szárny elcsavarására az alábbi mozgásegyenlet írható fel:

$$I_\gamma \ddot{\gamma} + K_\gamma \gamma = \int_0^{b/2} \frac{1}{2} \rho V^2 \bar{c} C_{L\alpha} \gamma h \bar{c} dy = \bar{q} C_{L\alpha} h \bar{c}^2 \gamma \int_0^{b/2} dy = \bar{q} C_{L\alpha} S \gamma h \bar{c} = h \bar{c} K_w \gamma = 0 \quad (5.4)$$

Az (5.4) egyenlet rendezése után az alábbi mozgásegyenletet kapjuk:

$$I_\gamma \ddot{\gamma} + (K_\gamma - h \bar{c} K_w) \gamma = 0. \quad (5.5)$$

Az (5.5) egyenlet nem veszi figyelembe a szárnyak saját csillapítását. Megemlítjük, hogy az aerodinamikai terhelések hozzájárulnak a szárnyak merevségéhez. Az (5.5) egyenlet alapján könnyen belátható, hogy a szárny elcsavarása harmonikus, lengő folyamat, ahol a rezgések körfrekvenciája a következő összefüggés alapján számítható:

$$\omega^2 = \frac{K_\gamma - h \bar{c} K_w}{I_\gamma}. \quad (5.6)$$

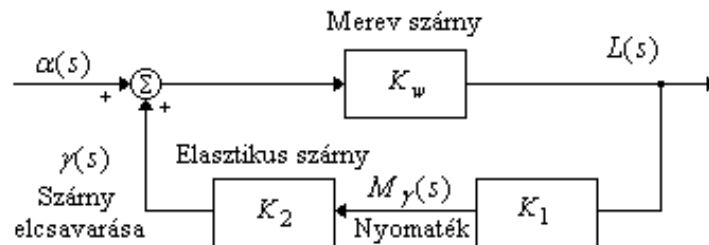
Ha $h > 0$, akkor a rezgések ω körfrekvenciája a \bar{q} dinamikus (torló) nyomás növekedésével csökken. A szárny elcsavarása akkor válik instabillá, ha teljesül az alábbi egyenlőtlenségi feltétel:

$$h \bar{c} K_w > K_\gamma. \quad (5.7)$$

A $h \bar{c} K_w = K_\gamma$ feltételhez tartozó repülési sebességet a szárny *divergencia sebességének* szokás nevezni, melynek értéke:

$$V_D = \sqrt{2K_\gamma / q_s C_{L\alpha} h \bar{c}}. \quad (5.8)$$

A gyakorlatban az instabil aerodinamikai jelenségek jelen vannak, e folyamatok kis értékű aerodinamikai csillapítást is létesítenek. A kialakuló instabil folyamatok keletkezését tekintsük át a 8. ábrán.



8. ábra. Az elcsavaródó szárny hatásvázlata [25].

A szárny elcsavaródását okozó M_γ nyomaték arányos az $L(s)$ felhajtóerővel, és γ értékű elcsavaródási szög hoz létre. A 8. ábra alapján – tekintettel a pozitív előjelű visszacsatolásra – az alábbi átviteli függvény írható fel:

$$\frac{L(s)}{\alpha(s)} = \frac{K_w}{1 - K_1 K_2 K_w} = \frac{\bar{q} S C_{L\alpha}}{1 - K_1 K_2 \bar{q} S C_{L\alpha}}. \quad (5.9)$$

A rendszer akkor válik instabillá, vagyis az $L(s)$ felhajtóerő korlátos $\alpha(s)$ bemeneti jel esetén korlátlanul növekszik, ha az (5.9) átviteli függvény nevezője zérusértékű, vagyis

$$\bar{q} = \frac{1}{K_1 K_2 S C_{L\alpha}}. \quad (5.10)$$

Az instabil tranziens folyamatok feltétele a divergencia sebességgel is kifejezhető, tehát:

$$V_D = \sqrt{\frac{2}{K_1 K_2 q S C_{L_\alpha}}}. \quad (5.11)$$

A szárny divergencia sebességének (5.8) és (5.11) egyenletei akkor egyenlők, ha

$$K_1 = \bar{c} h, \quad (5.12)$$

és

$$K_2 = K_\gamma^{-1}. \quad (5.13)$$

6. A SZÁRNY KAPCSOLT MOZGÁSA

Feltételezzük, hogy a repülőgép téglalap alakú szárnya nem nyilazott, és a rugalmas mozgása kétszabadságfokú: hajlító és csavaró mozgás végez. Nyugodt légkörben végrehajtott repülés esetén a hajlító, és a csavaró mozgás egyenletei az alábbiak lesznek:

$$I\ddot{\lambda} + I_{\lambda_\gamma}\ddot{\gamma} + K_s\lambda = 0, \quad (6.1)$$

$$I_\gamma\ddot{\gamma} + I_{\lambda_\gamma}\ddot{\lambda} + K_\gamma\gamma = 0. \quad (6.2)$$

A (6.1) és a (6.2) egyenletekben az I_{λ_γ} kereszt tehetetlenségi nyomaték az alábbi egyenlet alapján határozható meg:

$$I_{\lambda_\gamma} = \int_{\text{szárny}} (x - x_f)y \delta m = m(x_{sz.tk.} - x_f)y_{sz.tk.}, \quad (6.3)$$

ahol $x_{sz.tk.}$ és $y_{sz.tk.}$ a szárny tömegközéppontjának koordinátái. A kapcsolt mozgás természetes körfrekvenciáit az alábbi egyenlet alapján számíthatjuk ki:

$$(-I\omega^2 + K_s)(-I_\gamma\omega^2 + K_\gamma) - I_{\lambda_\gamma}^2\omega^4 = 0. \quad (6.4)$$

A (6.4) egyenlet megoldásaként kapott frekvenciák közül az egyik kicsivel nagyobb, mint a csavaró mozgás körfrekvenciája, a második körfrekvencia kicsivel alatta marad a szárny hajlító mozgása körfrekvenciájának. A megoldásként kapott másik két körfrekvencia a csavarással kiegészülő hajlító, valamint a hajlítással kiegészülő csavaró mozgást jellemzi.

Ha a repülőgép szárnya V relatív sebességű levegőáramban helyezkedik el, akkor a (6.1) és a (6.2) mozgásegyenletek az alábbi formában írhatók fel:

$$I\ddot{\lambda} + I_{\lambda_\gamma}\ddot{\gamma} + K_s\lambda = -\bar{q}\frac{bS}{2}C_{L_\alpha}\left(\frac{b}{6V}\dot{\lambda} + \frac{\gamma}{2}\right) = -K_w\frac{b}{4}\left(\frac{b}{3V}\dot{\lambda} + \gamma\right), \quad (6.5)$$

$$I_\gamma\ddot{\gamma} + I_{\lambda_\gamma}\ddot{\lambda} + K_\gamma\gamma = -K_w\bar{c}\left\{h\left(\frac{b}{4V}\dot{\lambda} + \gamma\right) + \frac{\bar{c}M_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}}{VC_{L_\alpha}}\right\}. \quad (6.6)$$

A (6.6) egyenletben a $\bar{c}M_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$ csillapító tag instabil aerodinamikai jelenségek következménye. Jelen esetben úgy a szárny hajlító-, mint a csavaró mozgása csillapított, de adott feltételek mellett előfordulhat, hogy valamely mozgás csillapítatlanná válik. E jelenség az ún. kritikus, V_F flutter sebesség esetén fordul elő, a természetes körfrekvencia pedig ω_F lesz. A kritikus flutter feltételek mellett az egyes szeparált mozgások csillapítási tényezői

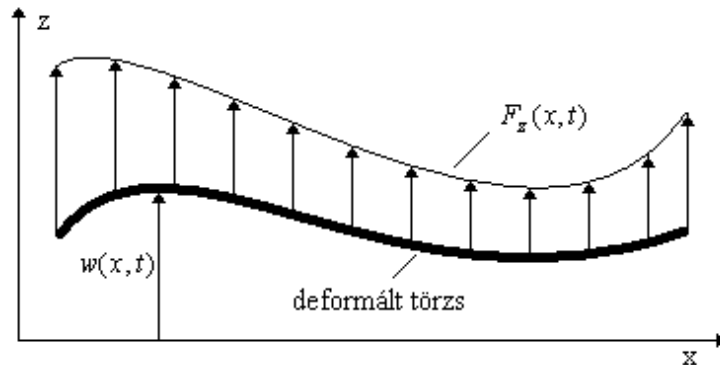
zérusértékűek: a hajlító és a csavaró mozgások sajátfrekvenciái pedig megegyeznek egymással [1, 2, 3, 4, 13, 14, 16, 25].

7. A TÖRZS DEFORMÁCIÓJA DINAMIKUS KÜLSŐ TERHELÉS HATÁSÁRA

Az UAV elasztikus törzs deformációjának vizsgálata során feltételezzük, hogy a törzs ún. egyszabadságfokú, más néven egydimenziós mechanikai lengő matematikai modellel rendelkezik [7]. A repülőgép aeroelasztikus mozgásának vizsgálata során annak törzsét karcsú, vékony *rúdnak* (tartó) tekintjük [1, 2, 3, 7, 13, 16, 25]. A repülőgép törzsének egyszerű helyettesítő képe a 9. ábrán látható.

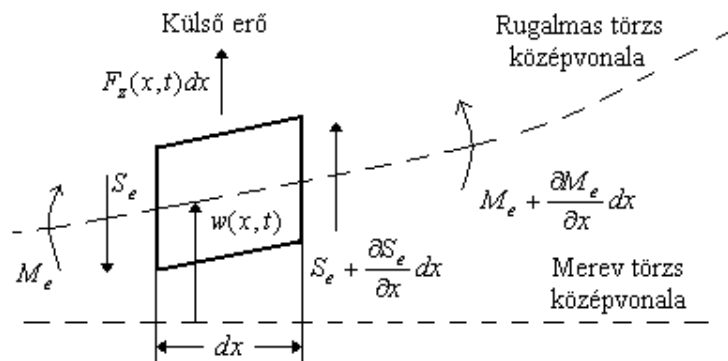
A rúd olyan mechanikai szerkezeti elem, amelynek keresztmetszete lényegesen kisebb annak hosszánál, a hajlítással és a csavarással szemben pedig ellenállást fejt ki. A továbbiakban feltételezzük, hogy a rúd – a merev, deformáció nélküli helyzetéhez képest – csak hajlító mozgást végez: a rúd csavaró-, illetve nyíró terhelések miatt bekövetkező alakváltozását nem vizsgáljuk.

A 9. ábrán $F_z(x, t)$ a repülőgép törzsére ható függőleges irányú dinamikus terhelést, míg a rúd (törzs) egyes kisméretű szegmenseinek függőleges tengely mentén mért egyenes vonalú elmozdulását $w(x, t)$ jelöli.



9. ábra. UAV törzs hosszirányú deformációja dinamikus külső terhelés hatására [25].

A továbbiakban vizsgáljuk meg a rúd (UAV törzs) egy kis szegmensének külső erő hatása alatt kialakuló terhelési viszonyait (10. ábra).



10. ábra. A törzs szegmensére ható erők és nyomatékok [25].

Általános esetben, a rúd kisméretű szegmensének a merev törzs középvonaltól mért, $w(x, t)$ lineáris kitérését az alábbi egyenlet alapján határozható meg [1, 2, 3, 4, 7, 9, 12, 13, 14, 23, 25, 26]:

$$w(x, t) = \alpha_{ae}(x, t) + \beta_{ae}(x, t), \quad (7.1)$$

ahol $\alpha_{ae}(x,t)$ a merev törzs elhajlásának szögkitérése, míg $\beta_{ae}(x,t)$ pedig a törzs elcsavarásának szögkitérése. A (7.1) egyenletben alkalmazott ae alsó index az *aeroelasztikus* kifejezést jelöli, így különböztetvén meg az aeroelasztikus mozgás szögeit az állás-, és a csúszásszög korábbról ismert α és β jelöléseitől.

Elhanyagolhatóan kis értékű dx esetén az UAV törzs szegmens egyensúlyi helyzetére a következő összefüggések írhatók fel [2, 3, 9, 12, 13, 25]:

$$m(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} (w(x,t)) = F_z(x,t) + \frac{\partial S_e}{\partial x}, \quad (7.2)$$

$$\mu(x) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\alpha(x,t)) \right] = S_e + \frac{\partial M_e}{\partial x}. \quad (7.3)$$

A továbbiakban feltételezzük, hogy a repülőgép aeroelasztikus mozgása során a repülőgép tömegközéppontja a rugalmas törzs középvonalán helyezkedik el. A (7.2)–(7.3) egyenletekben: $m(x)$ egységnyi törzshosszra eső tömeg, $\mu(x)dx$ a szegmens tömege által az y tengely körül létesített tehetetlenségi nyomatéka, S_e az elasztikus nyíró nyomaték, M_e az elasztikus hajlító nyomaték, végül $F_z(x,t)$ a külső terhelőerő. A jelölések egyszerűsítése végett az idő szerinti parciális differenciálást felső pontokkal jelöljük.

A nyírás-, és a hajlítás nyomatékegyenletei az alábbi kifejezésekkel adhatók meg:

$$S_e = GK \frac{\partial \beta_{ae}}{\partial x}, \quad (7.4)$$

$$M_e = EI \frac{\partial^2 \alpha_{ae}}{\partial x^2}, \quad (7.5)$$

ahol GK a nyíró merevség, I a keresztmetszet x tengelyre vett tehetetlenségi nyomatéka, E a rugalmassági modulus, EI a hajlító merevség [2, 3, 16].

A (7.2)-(7.3) mozgásegyenletek – a (7.4)-(7.5) egyenletek figyelembevételével – az alábbi alakban is felírhatók:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 \alpha_{ae}}{\partial x^2} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu(x) \frac{\partial \ddot{\alpha}_{ae}}{\partial x} \right] + m(x) \ddot{w}(x,t) = F_z(x,t), \quad (7.6)$$

$$GK \frac{\partial \beta_{ae}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[EI \frac{\partial^2 \alpha_{ae}}{\partial x^2} \right] - \mu(x) \frac{\partial^2 \ddot{\alpha}_{ae}}{\partial x^2} = 0. \quad (7.7)$$

Mivel a rúd jellemzői változnak annak hossza mentén, ezért a (7.1), a (7.6), és a (7.7) egyenleteket – az $\alpha_{ae}(x,t)$, a $\beta_{ae}(x,t)$, a $\partial \alpha_{ae} / \partial x$ mennyiségek geometriai kezdeti feltételei, valamint a rúd végeire meghatározott S_e és M_e elasztikus feltételek mellett – egyidejűleg kell megoldani. A dinamikai feladatok megoldása során az α_{ae} , $\dot{\alpha}_{ae}$, β_{ae} , $\dot{\beta}_{ae}$ mennyiségekre vonatkozó kezdeti feltételeket $t = 0$ esetre értelmezzük.

A gyakorlatban számos repülőgép esetén a törzs *egynemű (homogén) rúdként* is felfogható. Eme egyszerűsítő feltételt alkalmazva igazak az alábbi egyenletek:

$$EI = \text{áll.}, GK = \text{áll.}, m(x) = \text{áll.}, \mu(x) = \text{áll.} \quad (7.8)$$

A (7.4)-(7.7) egyenletekben az α_{ae} , β_{ae} , S_e , és az M_e mennyiségek kiküszöbölésével, valamint a (7.8) egyenlet figyelembevételével a rúdszegmens függőleges mozgásegyenletére a következő kifejezést kapjuk:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \left[m(x) \frac{EI}{GK} + \mu(x) \right] \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2} + m(x) \ddot{w} + \frac{\mu(x)m(x)}{GK} \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial t^2} = F_z(x, t). \quad (7.9)$$

Hasonlóképpen, az α_{ae} és a β_{ae} szögekre is meghatározhatjuk a mozgásegyenleteket. További vizsgálataink során vezessük be az alábbi dimenzió nélküli mennyiségeket:

$$\tilde{w} = \frac{w}{l}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{l}, \quad \tilde{t} = \omega t, \quad (7.10)$$

ahol l a rúd hossza, míg ω a rúd lengési körfrekvenciája. A (7.9) egyenlet jobb oldalán álló kifejezés – figyelembe véve a (7.10) dimenzió nélküli mennyiségeket – az alábbi alakban írható fel [2, 3, 16, 25]:

$$\begin{aligned} & \frac{l^3}{EI} \left\{ EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \left[m \frac{EI}{GK} + \mu \right] \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2} + m \ddot{w} + \frac{\mu m}{GK} \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial t^2} \right\} = \\ & = \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{ml^4 \omega^2}{EI} \left\{ \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{t}^2} - \left[\frac{EI}{GKl^2} + \frac{\mu}{ml^2} \right] \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{t}^2} + \frac{\mu \omega^2}{GK} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{t}^4} \right\}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Karcsú, vékony rúd esetén igazak az alábbi egyenlőtlenségi feltételek [2, 3, 16, 25]:

$$\frac{EI}{l^2 GK} \ll 1, \quad (7.12)$$

$$\frac{\mu}{ml^2} \ll 1, \quad (7.13)$$

$$\frac{\mu \omega^2}{GK} \ll 1. \quad (7.14)$$

A (7.12)–(7.13) egyenlőtlenségi feltételek gyakorlatilag azt jelentik, hogy a rúd keresztmetszetének és a hosszának a hányadosa kis értékű, míg a (7.14) feltétel azt jelenti, hogy a szegmens ω körfrekvenciája a lengési spektrum alsó frekvenciatartományában vesz fel értéket.

Az aeroelasztikus deformáció további vizsgálata során az egyszerűség kedvéért a rúd nyíró terhelésétől–, és mozgásától eltekintünk: nem mintha az nem lenne lényeges, de a matematikai műveleteinket lényeges mértékben nehezíti és bonyolítja.

A fent elhangzottaknak megfelelően, legyen tehát $\beta = 0$. Ebben az esetben a vékony rúd (7.9) mozgásegyenlete – a (7.12)-(7.14) egyenlőtlenségi feltételek figyelembe vételével – az alábbi alakra egyszerűsödik [2, 3, 16, 25]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = F_z(x, t). \quad (7.15)$$

A (7.15) egyenlet szétválasztható, parciális differenciál-egyenlet, ezért – az $F_z(x, t) = 0$ feltétel esetén – a homogén egyenlet megoldására az alábbi próbafüggvényt alkalmazzuk [2, 3, 16, 25]:

$$w(x, t) = W(x)T(t). \quad (7.16)$$

Visszahelyettesítve a (7.16) próba-függvényt a (7.15) mozgásegyenletbe, az alábbi egyenletet kapjuk:

$$-\frac{\ddot{T}}{T} = \frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^2} \right]}{m W(x)}. \quad (7.17)$$

Mivel az y és a t független változók egymástól függetlenek, ezért a (7.17) egyenlet bal-, és jobb oldala is független a változóktól. A (7.17) egyenlet két oldala között az ω^2 szeparációs állandó teremt kapcsolatot: a (7.17) a következő független, közönséges differenciál-egyenletet kapjuk:

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0, \quad (7.18)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^2} \right] - m \omega^2 W(x) = 0, \quad (7.19)$$

Rendezzük a (7.18) egyenletet, és vessük össze a kapott eredményt a (7.17) egyenlettel, az ω^2 szeparációs állandó a következő lesz:

$$\omega^2 = \frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^2} \right]}{m W(x)}, \quad (7.20)$$

ahol ω az aeroelasztikus mozgás körfrekvenciája.

Vizsgáljuk meg a (7.15) egyenletből az $F_z(x,t)=0$ feltétel esetén képzett homogén differenciál-egyenlet explicit megoldását. Vizsgálataink során feltételezzük, hogy a vizsgált rúd homogén anyagú. A rúd mozgásegyenlete most a következő lesz:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0. \quad (7.21)$$

A (7.21) egyenletet osszuk végig az $m(x)$ kifejezéssel. A következő egyenletet kapjuk:

$$a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (7.22)$$

ahol:

$$a^2 = \frac{EI}{m(x)}. \quad (7.23)$$

A (7.17) egyenlet a (7.23) egyenlet figyelembevételével a következő alakban is felírható:

$$-\frac{\ddot{T}}{T} = a^2 \frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^2} \right]}{W(x)}. \quad (7.24)$$

A (7.18)–(7.19) egyenletek most a következő alakban írható fel:

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0, \quad (7.25)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^2} \right] - \frac{\omega^2}{a^2} W(x) = 0. \quad (7.26)$$

A (7.25) és a (7.26) egyenletek megoldásait az alábbi próbafüggvények alakjában keressük [2, 3, 16, 25]:

$$T = A \sin \omega t + B \cos \omega t, \quad (7.27)$$

$$W = C \sinh \sqrt{\frac{\omega}{a}} x + D \cosh \sqrt{\frac{\omega}{a}} x + E \sin \sqrt{\frac{\omega}{a}} x + F \cos \sqrt{\frac{\omega}{a}} x. \quad (7.28)$$

A (7.21) homogén differenciál-egyenlet megoldása a következő lesz:

$$w(x, t) = W(x)T(t) = [A \sin \omega t + B \cos \omega t] \times \\ \times \left[C \sinh \sqrt{\frac{\omega}{a}} x + D \cosh \sqrt{\frac{\omega}{a}} x + E \sin \sqrt{\frac{\omega}{a}} x + F \cos \sqrt{\frac{\omega}{a}} x \right]. \quad (7.29)$$

A (7.29) egyenlet A, B, C, D, E , és az F együtthatóit, illetve az ω körfrekvenciát a kezdeti feltételekből, illetve a szélső feltételekből kell meghatározni.

A (7.20) kifejezést helyettesítsük be a (7.15) mozgásegyenletbe. A behelyettesítés eredményeképpen a következő egyenletet kapjuk:

$$mW(x)\ddot{T}(t) + mW(x)\omega^2 T(t) = F_z(x, t). \quad (7.30)$$

A (7.30) egyenletnek végtelen sok megoldás felel meg, amelyeket az elasztikus lengés alap-, illetve felharmonikusainak nevezünk. Ily módon a (7.30) egyenletet a következő általános alakban írhatjuk fel:

$$mW_i(x)\ddot{T}_i(t) + mW_i(x)\omega_i^2 T_i(t) = F_z(x, t), \quad (7.31)$$

ahol $W_i(x)$ az i -edik módusz alakfüggvénye, $T_i(t)$ megfelelően megválasztott időfüggvény.

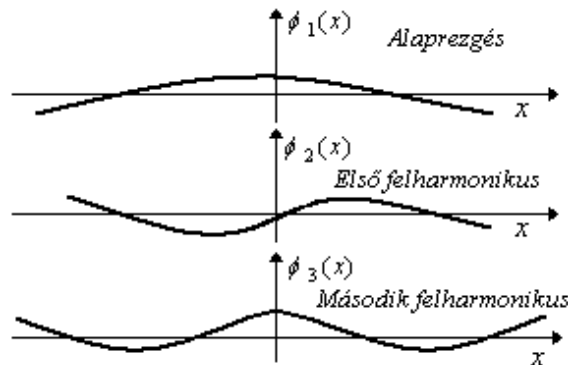
A szabad végű rúd (UAV törzs) erőhatásmentes mozgásának vizsgálata után határozzuk meg a homogén anyagú vékony rúd külső erők hatására létrejövő kényszermozgását. A karcsú rúd differenciál-egyenlete korábbról ismert, vagyis

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = F_z(x, t). \quad (7.32)$$

A Rayleigh–Ritz módszer alapján a rúd tetszőleges szegmensének $w(x, t)$ függőleges elmozdulása – a szuperpozíció elvének megfelelően – végtelen sok módusz összegeként határozható meg, és a következő egyenlet alapján számítható ki [2, 3, 9, 12, 16, 25]:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \xi_i(t), \quad (7.33)$$

ahol $\phi_i(x)$ az i -edik módusz alakfüggvénye, $\xi_i(t)$ megfelelően megválasztott időfüggvény, más szóval, általános koordináta. A szabad végű tartó lengésképe a 11. ábrán láthatók.



11. ábra A szabad végű tartó (UAV törzs) lengésképe [25].

Helyettesítsük a (7.33) próbafüggvényt a (7.32) egyenletbe. A rúd mozgásegyenlete most a következő lesz:

$$m(x)\sum_{i=0}^{\infty}\phi_i(x)\ddot{\xi}_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI \frac{\partial^2\phi_i(x)}{\partial x^2} \right]\xi_i(t) = F_z(x,t). \quad (7.34)$$

A (7.34) egyenletet szorozzuk meg a $\phi_j(x)$ kifejezéssel. Az így kapott egyenletet integráljuk a rúd l hossza mentén. Az egyenlet rendezése után kapjuk, hogy

$$\sum_{i=0}^{\infty}\ddot{\xi}_i(t)\int_0^l\phi_i(x)\phi_j(x)mdx + \sum_{i=1}^{\infty}\xi_i(t)\int_0^l\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI \frac{\partial^2\phi_i(x)}{\partial x^2} \right]\phi_j(x)dx = \int_0^l F_z(x,t)\phi_j(x)dx, \quad (7.35)$$

vagy más alakban:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\ddot{\xi}_i(t)\int_0^l\phi_i(x)\phi_j(x)mdx + \sum_{i=1}^{\infty}\xi_i(t)\omega_i^2\int_0^l\phi_i(x)\phi_j(x)mdx = \int_0^l F_z(x,t)\phi_j(x)dx. \quad (7.36)$$

Felhasználva az elasztikus lengések ortogonalitási feltételét, valamint az

$$\int_0^l\phi_i(x)\phi_j(x)mdx = M_i\delta_{ij} \quad (7.37)$$

egyenletet, a (7.36) mozgásegyenlet a következő alakban írható fel:

$$M_i\ddot{\xi}_i + M_i\omega_i^2\xi_i = \Xi_i, \quad i=1,2,3,\dots,\infty, \quad (7.38)$$

ahol:

$$M_i = \int_0^l\phi_i^2(x)mdx - \text{az } i\text{-edik módusz általános tömege}, \quad (7.39)$$

$$\Xi_i = \int_0^l F_z(x,t)\phi_i(x)dx - \text{az } i\text{-edik módusz általános ereje}. \quad (7.40)$$

A (7.38) egyenlet a szabadvégű, vékony rúd (szál) egy szegmense $F_z(x,t)$ függőleges külső terhelés hatására létrejövő csillapítatlan lengéseit írja le. Ha az $F_z(x,t)$ külső erő független a vékony rúd mozgásától, akkor – szeparációs elv alapján – az egyes móduszok egymástól függetlenek, tehát az elasztikus mozgás egyenletei szétválaszthatóan megoldhatók. A (7.38) egyenlet megoldásaként kapott $\xi_j(t)$ függvényeket most helyettesítsük be a (7.33) egyenletbe: ily módon megkapjuk a rúd egyes szegmensei lineáris eltérését a merev repülőgépet szimbolizáló egyenes rúd középvonalától [2, 3, 9, 12, 16, 25].

A fent bemutatott elmélet alkalmazásaként vizsgáljuk meg először azt az esetet, ha a külső erő harmonikusan változik, vagyis

$$F_z(x,t) = F_z(x)\sin\Omega t. \quad (7.41)$$

Feltételezzük, hogy a harmonikus bemeneti jelre a vékony rúd harmonikus alakfüggvénnyel válaszol, vagyis a (7.33) egyenletben az alakfüggvény a következő lesz

$$\phi_i(x) = \sin\left(i\pi\frac{y}{l}\right). \quad (7.42)$$

Az általános tömeg, és az általános erő – a (7.41) harmonikus külső erő esetén – a következő egyenlettel adható meg:

$$M_i = m \int_0^l \sin^2 \frac{j\pi}{l} x dx = \frac{ml}{2}, \quad (7.43)$$

$$\Xi_i = \sin \Omega t \int_0^l F_z(x) \sin \frac{j\pi}{l} x dx. \quad (7.44)$$

Helyettesítsük be a (7.43), és a (7.44) egyenleteket a (7.38) általános mozgásegyenletbe, és rendezzük a kapott egyenletet. A behelyettesítés és rendezés eredményeképpen karcsú rúd aeroelasztikus mozgásának alábbi kifejezését kapjuk [2, 3, 9, 12, 16, 25]:

$$\ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = \left(\frac{2}{ml} \int_0^l F_z(x) \sin \frac{i\pi x}{l} dx \right) \sin \Omega t, \quad i=1,2,3,\dots,\infty. \quad (7.45)$$

Feltételezzük, hogy a kezdeti feltételek zérusértékűek, tehát igazak a következő egyenlőségi feltételek:

$$w(x,0) = 0, \quad (7.46)$$

$$\xi_i(0) = 0. \quad (7.47)$$

E feltételeket a (7.33) egyenlet segítségével ellenőrizhetjük. A (7.33) egyenlet $t=0$ esetén az alábbi alakra hozható:

$$w(x,0) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \xi_i(0) = 0. \quad (7.48)$$

A $\xi_i(0) = 0$ feltételt megkapjuk, ha a (7.48) egyenletet megszorozzuk a $m\phi_j(x)$ kifejezéssel, majd a kapott egyenletet integráljuk a 0 és l tartományon, vagyis

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(0) \int_0^l \phi_i(x) \phi_j(x) m(x) dx = 0. \quad (7.49)$$

Az ortogonalitási feltétel figyelembevételével a (7.49) egyenlet a következő alakra redukálódik:

$$\xi_i(0) = 0. \quad (7.50)$$

Hasonló megfontolások alapján, az $\dot{w}(x,0) = 0$ feltétel teljesülése esetén teljesül az alábbi egyenlet:

$$\dot{\xi}_i(0) = 0. \quad (7.51)$$

A (7.50) és a (7.51) kezdeti feltételek teljesülése mellett oldjuk meg a (7.45) egyenletet. A elasztikus mozgás egyenletének megoldásaként kapjuk, hogy:

$$\xi_i(t) = \frac{2}{ml} \left(\int_0^l F_z(x) \sin \frac{i\pi x}{l} dx \right) \frac{\sin \Omega t - (\Omega / \omega_i) \sin \omega_i t}{\omega_i^2 (1 - \Omega^2 / \omega_i^2)}. \quad (7.52)$$

A vékony rúd kis szegmense elasztikus mozgásának válaszfüggvényét a (7.42) és a (7.52) egyenletek (7.33) egyenletbe történő behelyettesítéssel kaphatjuk meg. A rúd szegmensének kitérése a merev állapotból a következő kifejezéssel írható le [2, 3, 9, 12, 16, 25]:

$$\begin{aligned}
w(x,t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \xi_i(t) = \\
&= \frac{2}{ml} \sum_{i=1}^{\infty} \sin \frac{i\pi x}{l} \left(\int_0^l F_z(x) \sin \frac{i\pi x}{l} dx \right) \frac{\sin \Omega t - (\Omega / \omega_i) \sin \omega_i t}{\omega_i^2 (1 - \Omega^2 / \omega_i^2)}. \quad (7.53)
\end{aligned}$$

Másodszor, legyen a külső terhelés a rúdra merőlegesen ható egyenletes erőterhelés egyenlete a következő

$$F_z(x) = f = \text{áll.} \quad (7.54)$$

A rúd szegmensének elhajlását a (7.53) egyenlet alapján a (7.54) egyenlet figyelembevételével az alábbi képlet írja le:

$$w(x,t) = \frac{4f}{m\pi} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l} \sin \Omega t - (\Omega / \omega_i) \sin \omega_i t}{i \omega_i^2 (1 - \Omega^2 / \omega_i^2)}. \quad (7.55)$$

Végül, vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a merev repülőgép törzsére az $x = x_o$ koordinátájú helyen $F(t)$ intenzitású koncentrált terhelés hat. Ebben az esetben terhelőerő a következő egyenlettel adható meg [2, 3, 9, 12, 16, 25]:

$$F_z(x) = F(t) \delta(x - x_o), \quad (7.56)$$

ahol $\delta(x - x_o)$ az $x = x_o$ koordinátájú helyre eltolt Dirac-függvény.

A rúd-szegmens elhajló mozgása egyenletének meghatározása előtt, a Dirac-függvény tulajdonságainak figyelembevételével, határozzuk meg a következő integrál értékét:

$$\int_0^l F(t) \delta(x - x_o) \sin \frac{i\pi x}{l} dx = F(t) \sin \frac{i\pi x_o}{l}. \quad (7.57)$$

Helyettesítsük be a (7.56) egyenletet a (7.53) egyenletbe, valamint vegyük figyelembe a (7.57) egyenletet is. Ily módon a rúd elhajló mozgásának egyenlete a következő lesz:

$$w(x,t) = \frac{2F(t)}{ml} \sum_{i=1}^{\infty} \sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{i\pi x_o}{l} \frac{\sin \Omega t - (\Omega / \omega_i) \sin \omega_i t}{\omega_i^2 (1 - \Omega^2 / \omega_i^2)}. \quad (7.58)$$

A (7.55) és a (7.58) mozgásegyenletek a rezonáns rezgések kialakulásának feltételeit adják meg, mivel az

$$\Omega \rightarrow \omega_i \quad (7.59)$$

feltétel teljesülése esetén a szegmens eredeti állapotból mért $w(x,t)$ kitérése egyre nagyobb értékű lesz, majd az

$$\Omega = \omega_i \quad (7.60)$$

egyenlőségi feltétel teljesülése esetén igaz, hogy

$$w(x,t) \rightarrow \infty. \quad (7.61)$$

Eddigi vizsgálataink során feltételeztük, hogy a szabadvégű vékony rúd (tartó) $F_z(x,t)$ külső erő hatására kialakuló lengései csillapíthatatlanok. A csillapíthatatlan lengések (7.38) mozgásegyenlete csillapítással rendelkező rúd esetére az alábbi alakban írható fel [2, 3, 9, 12, 16, 25]:

$$\ddot{\xi}_i + 2\xi_i^* \omega_i \dot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = \frac{\Xi_i}{M_i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \infty, \quad (7.62)$$

ahol ξ_i^* az i -edik módusz csillapítási tényezője. Általában igaz, hogy a csillapítási tényező kis értékű. A [9, 12, 25] irodalmak szerint általában igaz, hogy

$$\xi_i^* \cong (0,02 - 0,05). \quad (7.63)$$

A szabadvégű, vékony rúd egy tetszőleges szegmensének (7.33) mozgásegyenlete – a (7.38)-(7.40) egyenletek figyelembevételével – adott $F_z(x, t)$ terhelés esetén is kiszámítható.

A [9] irodalom szerint, ha az elasztikus mozgást a magassági kormány kitérésekor a felületen ébredő légerő változás hozza létre, akkor a (7.56) egyenletet a következő alakban írhatjuk fel:

$$F_z(x, t) = K\delta_E(t)\delta(x - x_E), \quad (7.64)$$

ahol K arányossági tényező, $\delta_E(t)$ a magassági kormány kitérésének időfüggvénye, és végül, $x = x_E$ a magasság kormány koordinátája.

Az UAV törzsre az $x = x_E$ koordinátájú pontban ható koncentrált terhelés esetén a (7.40) általános erő a következő összefüggés alapján számítható:

$$\Xi_i = \int_0^l F_z(x, t)\phi_i(x)dx = \int_0^l K\delta_E(t)\delta(x - x_E)\phi_i(x)dx = K\phi_i(x_E)\delta_E(t) \quad (7.65)$$

A repülőgépre ható koncentrált terhelés esetén a (7.62) mozgásegyenlet – a (7.65) egyenlet figyelembevételével – az alábbi egyenlettel adható meg:

$$\ddot{\xi}_i + 2\xi_i^*\omega_i\dot{\xi}_i + \omega_i^2\xi_i = K_i\phi_i(x_E)\delta_E(t), \quad i = 1, 2, 3, \dots, \infty, \quad (7.66)$$

ahol $K_i = K/M_i$ arányossági tényező.

A szögsebesség érzékelő $x = x_{SZ.E.}$ koordinátájú beépítési helyén az UAV törzs deformálatlan–, és a deformált középvonalai által bezárt szög a következő összefüggés írható fel:

$$tg v_{SZ.E.} = \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right|_{x=x_{SZ.E.}} = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(t) \left. \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x_i} \right|_{x=x_{SZ.E.}}, \quad (7.67)$$

Mindezek alapján megállapítható, hogy a szögsebesség érzékelő a merev repülőgép középvonalának elmozdulása mellett az aeroelasztikus mozgásból eredő deformált középvonal helyzetváltozását is érzékeli, amelynek szögsebessége az alábbi kifejezéssel írható le [9, 12, 25]:

$$\dot{v}_{SZ.E.} \cong \left. \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right) \right|_{x=x_{SZ.E.}} = \sum_{i=1}^{\infty} \dot{\xi}_i(t) \left. \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x_i} \right|_{x=x_{SZ.E.}}. \quad (7.68)$$

Ha a merevnek tekintett UAV fedélzetén gyorsulásmérőt is alkalmaznak, akkor az a merev repülőgép gyorsulásai mellett az elasztikus mozgás gyorsulásait is érzékeli, és méri. Az elasztikus mozgás által létesített gyorsulás – a gyorsulásmérő $x = x_{GY.}$ koordinátájú beépítési helyén – az alábbi egyenlettel határozható meg [9, 12, 25]:

$$\left. \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \right|_{x=x_{GY.}} = \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\xi}_i(t) \phi_i(x_{GY.}). \quad (7.69)$$

Összefoglalva az elhangzottakat: a repülőgép bólintási szögsebességét, felhasználva a szuperpozíció elvét, a merev és az elasztikus repülőgép válaszfüggvényeinek összegeként határozhatjuk meg [9, 12, 13, 25]:

$$\dot{q} = \dot{q}_M + \dot{q}_R. \quad (7.70)$$

A merev repülőgép hosszirányú, rövidperiodikus mozgásának átviteli függvénye a következő egyenlettel is megadható [9, 12, 13, 25, 26]:

$$Y(s) = \frac{q(s)}{\delta_E(s)} = \frac{A(sT+1)}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2}. \quad (7.71)$$

Írjuk fel (7.69) egyenlet Laplace-transzformáltját. Zérus kezdeti feltételek mellett kapjuk, hogy

$$s\nu(s) = s\mathcal{G}_R(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial\phi_i(x)}{\partial x_i} \Big|_{x=x_{SZ.E.}} s\xi_i(s). \quad (7.72)$$

Az elasztikus mozgás (7.66) egyenlete az alábbiak szerint írható fel operátoros alakban:

$$(s^2 + 2\xi_i^* \omega_i s + \omega_i^2) \xi_i(s) = K_i \phi_i(x_E) \delta_E(s), \quad i=1,2,3,\dots,\infty. \quad (7.73)$$

A (7.70)–(7.73) egyenletek felhasználásával az elasztikus mozgást végző repülőgép hosszirányú, rövidperiodikus mozgásának bólintó szögsebessége a következő egyenlettel határozható meg [9, 12, 13, 25, 26]:

$$q(s) = \left[\frac{A(sT+1)}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{sK_i^*}{s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2} \right] (-\delta_E(s)), \quad (7.74)$$

ahol:

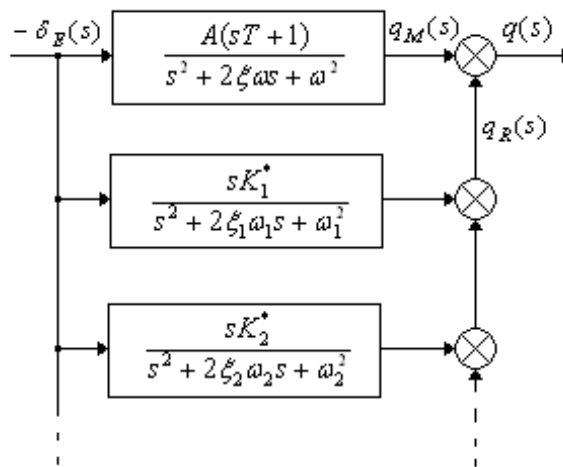
$$K_i^* = K_i \phi_i(x_E) = \frac{K}{M_i} \phi_i(x_E). \quad (7.75)$$

A (7.74) egyenlet alapján a repülőgép átviteli függvénye már könnyen származtatható, vagyis:

$$Y(s) = \frac{q(s)}{-\delta_E(s)} = \frac{A(sT+1)}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{sK_i^*}{s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2} \quad (7.76)$$

A (7.76) átviteli függvényben a magassági kormány $\delta_E(s)$ kitérését azért vesszük negatív előjellel, hogy a merev repülőgép válaszfüggvénye pozitív előjelű legyen.

A merev repülőgép (7.76) egyenlet alapján megrajzolt hatásvázlata a 12. ábrán látható.



12. ábra. A nemirányított UAV hatásvázlata [25].

Az UAV hosszirányú, rövidperiodikus mozgásának vizsgálata során a magassági kormány $\delta_e(t)$ kitérésének modellezésére számos determinisztikus modellt szokás alkalmazni. Ily módon tehát a magassági kormány szögsebessége változhat valós Dirac-függvény (tűfüggvény), egységugrás, egységsebesség, négyszögjel, vagy fűrészjel, esetleg e jelekből származtatott tetszőleges időfüggvény szerint. A repülőgép frekvenciatartománybeli vizsgálata során a bemeneti (vizsgáló) jel szinuszosan váltakozó jel.

8. BEFEJEZÉS

A rugalmas légi járművek vizsgálata során kiemelt fontosságú, hogy a légi jármű lengésképét ismerjük, mert az egyes felharmonikusok ismerete, a csomópontok és a duzzadóhelyek koordinátáinak ismerete elengedhetetlenül fontos a fedélzeti érzékelők elhelyezése szempontjából. A lengéskép ismerete fontos azért is, mert azokon a helyeken, ahol maximális erők, és nyomatékok hatnak az UAV sárkányszerkezetére, ott a gépészeti szerkezetet a szükséges mértékben megerősíteni szükséges.

Számos példát tudunk mondani azonban arra is, hogy egyéb más okok miatt nem sikerül elhelyezni a megfelelő módon a fedélzeti érzékelőket, ezért azok kimeneti jele tartalmazza a felharmonikusok jeleit is. Általában az alap-, és az első felharmonikus jelét, amelyek a legnagyobb amplitúdóval bírnak, szokás szűrni. Ezen az elven történt például a Szu-22, a MiG-23, a MiG-29 repülőgépeken, és történik ma is a J39 Gripen repülőgépen a szögsebesség-érzékelők kimeneti jelének szűrése.

A modern repülésszabályozás ma is gyakran használt technológiája az *Active Control Technology*. Eme technológia a B-52E repülőgépen kezdett kialakulni, ahol a légköri turbulencián történő átrepülések során korlátozták a terhelési többszörösöket, igyekeztek meggátolni, és nagyon gyorsan csillapítani az elasztikus lengéseket, amelyek a szárnyak törővégein extrém értéket, akár több mint egy méter kitérést is okozhattak.

Könnyű belátni, hogy az új, nem hagyományos tervezésű, és elrendezésű UAV is számos esetben kifejezetten hajlamos az elasztikus lengésekre. A cikk segítséget nyújt a fizikai jelenség megértésében, és támogatja az UAV tervezőket, hogyan alakítsák ki a fedélzeti szerzor-elhelyezéseket, mert ellenkező esetben a mért repülési paraméterek annyira zajosak lesznek, hogy érdemi szabályozást nem lehet rájuk építeni, vagy csak komoly szűrési-, jelátalakítási-, jelformálási folyamat után tudjuk őket érdemben használni.

Felhasznált irodalom

- [1] Duncan, W. J. *The Principles of the Control and Stability of Aircraft*, The Syndics of the Cambridge University Press, 1952.
- [2] Bisplinghoff, R. L. – Ashley, H. – Halfman, R. L. *Aeroelasticity*, Addison–Wesley Publishing Company, Inc., Cambridge, Mass., 1955.
- [3] Bisplinghoff, R. L. – Ashley, H. *Principles of Aeroelasticity*, John Wiley and Sons, Inc., New York–London, 1962.
- [4] Blakelock, J. H. *Automatic Control of Aircraft and Missiles*, John Wiley and Sons, New York–London–Sydney, 1965.
- [5] Лебедев, А. А. – Карабанов, В. А. *Динамика систем управления беспилотными летательными аппаратами*, Машиностроение, Москва, 1965 (orosz nyelven).
- [6] Под ред. Чернобровкина, Л. С. *Беспилотные летательные аппараты*, Машиностроение, Москва, 1967 (orosz nyelven).

- [7] Kármán, T. – Biot, M. A. *Matematikai módszerek műszaki feladatok megoldására*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1967.
- [8] Dickinson, B. *Aircraft Stability and Control for Pilots and Engineers*, Sir Isaac Pitman & Sons, Ltd., London, 1968.
- [9] Асланян, А. Э. *Системы автоматического управления полётом летательных аппаратов*, Часть I, Киевское Высшее Военное Авиационное Инженерное Училище, Киев, 1984 (orosz nyelven).
- [10] Gausz, T. *Helikopterek*, BME Mérnöktoábbképző Intézet, Budapest, 1982.
- [11] Rácz, E. *Repülőgépek*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.
- [12] Красовский, А. А. – Вавилов, Ю. А. – Сучков, А. И. *Системы автоматического управления летательных аппаратов*, Издание ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, Москва, 1986 (orosz nyelven).
- [13] McLean, D. *Automatic Flight Control Systems*, Prentice-Hall International Ltd., 1990.
- [14] Megson, T. H. G. *Aircraft Structures*, A Division of Hodder & Stoughton, London–Melbourne–Auckland, 1990.
- [15] Shaumann, R. – Ghausi, M. S. – Laker, K. R. *Design of Analog Filters, Passive, Active RC, and Switched Capacitor*, Prentice-Hall International, Inc., 1990.
- [16] Dowell, E. H. *A Modern Course in Aeroelasticity*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 1995.
- [17] Szabolcsi, R. *Design of the Pitch Attitude Control System for the Aeroelastic Fighter Aircraft*, Pannonian Applied Mathematical Meetings, Bulletines for Applied Mathematics, Göd, Hungary, pp (29–40), 1996.
- [18] Szabolcsi, R. – Szegedi, P. *Design of the Chebishev BR Filter for the Elastic Aircraft Longitudinal Stability Augmentation System*, Proceedings of the 1st International Symposium on Future Aviation Technologies FAT 2002, Vol. 1., pp (43–52), Szolnok, Hungary, April 12–14, 2002.
- [19] Dr. habil. Szabolcsi, R. *Conceptual Design of Unmanned Aerial Vehicle Systems for Non-Military Applications*, Proceedings of the 11th Mini Conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies VSDIA 2008, Budapest University of Technology and Economics, pp (637-644), (ISBN:978-963-313-011-7), 10-12 November 2008, Budapest, Hungary.
- [20] Dr. habil. Szabolcsi, R. *Some Thoughts on the Conceptual Design of the Unmanned Aerial Systems Used for Military Applications*, CD-ROM Proceedings of the Scientific Conference “XVI. Hungarian Days of Aeronautical Sciences”, Budapest University of Technology and Economics, pp(1-8), ISBN 978-963-420-857-0, 13-14 November 2008, Budapest, Hungary.
- [21] Szabolcsi R. *Conceptual Design of the Unmanned Aerial Vehicle Systems Used for Military Applications*, Scientific Bulletin of “Henri Coanda” Air Force Academy, No. 1/2009., ISSN 2067-0850, pp(61-68), Brasov, Romania.
- [22] Szabolcsi, R. *Conceptual Design of the Unmanned Aerial Vehicle Systems for the Firefighter Applications*, CD-ROM Proceedings of the 12th International Conference „AFASES 2010”, ISBN 978–973–8415–76–8, p4, 27–29 May 2010, Brasov, Romania

- [23] Szabolcsi, R. *Conceptual Design of the Unmanned Aerial Vehicle Systems for the Police Applications*, CD-ROM Proceedings of the 12th International Conference „AFASES 2010”, ISBN 978-973-8415-76-8, p4, 27-29 May 2010, Brasov, Romania
- [24] Szabolcsi, R. *UAV Flight Path Conceptual Design.*, Proceedings of the 16th International Conference “The Knowledge-Based Organization – Applied Technical Sciences and Advanced Military Technology”, ISSN 1843-6722, pp(519-524), 25-27 November 2010, Sibiu, Romania
- [25] Szabolcsi, R. *Modern automatikus repülésszabályozó rendszerek*, Miklós Zrínyi Nemzetvédelmi Egyetem, ISBN 978-963-7060-32-8, Budapest, 2011.
- [26] Szabolcsi, R. *Korszerű szabályozási rendszerek számítógépes tervezése*, Miklós Zrínyi Nemzetvédelmi Egyetem, ISBN 978-615-5057-26-7, Budapest, 2011.
- [27] Szabolcsi, R. *Preliminary design of the Terrain-Following Automatic Flight Control System Applied in Collision Avoidance Mission*, Proceedings of the 18th International Conference “The Knowledge-Based Organization – Applied Technical Sciences and Advanced Military Technology”, ISSN 1843-6722, pp(329-333), 14-16 June 2012, Sibiu, Romania.